Rangamati Nir,DUET,Gazipur-1707
info.sosbd@gmail.com
09678 677 677, 01751 402449

পাস বুক - ইঞ্জিনিয়ারিং মেকানিক্স

পড়ার সময় ঃ মাত্র ১৪ ঘণ্টা

লক্ষ্য ঃ ৩৫ মার্কস

ডিপ্লোমা ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষার্থীদের জন্য দ্রুত রিভিশনের পারফেক্ট সলিউশন!

পৃষ্ঠা সংখ্যা ঃ

☞ ই-বুক ভার্সন ঃ ১১৮ পৃষ্ঠা

☞ প্রিন্টযোগ্য কাগজে ঃ ৪০ পৃষ্ঠা

পরীক্ষা সংক্রান্ত তথ্য ঃ

☞ মোট মার্কস ঃ ৬০

☞ পাস মার্কস ঃ ২৪

প্রশ্ন ও মার্কস বিশ্লেষণ ঃ

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্ন ঃ

মোট পড়তে হবে ঃ ৭২ টি

নিশ্চিত কমন ঃ ৫টি

নিশ্চিত মার্কস ঃ ৫ (প্রতি প্রশ্নে ১ মার্কস)

✅ সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন ঃ

মোট পড়তে হবে ঃ ৩২ টি

নিশ্চিত কমন ঃ ৫টি

নিশ্চিত মার্কস ঃ ১০ (প্রতি প্রশ্নে ২ মার্কস)

✅ রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

মোট পড়তে হবে ঃ ৩৬ টি

নিশ্চিত কমন ঃ ৩টি

নিশ্চিত মার্কস ঃ ১৫ (প্রতি প্রশ্নে ৫ মার্কস)

📚 কিভাবে পড়বেন এই পাস বুক ঃ

🔷 Step 1- অধ্যায় বাছাই (সবার আগে শেষ করুন) ঃ

অধ্যায়	বিষয়	কারণ
৫	ভরকেন্দ্র	অতি-সংক্ষিপ্ত ও সংক্ষিপ্ত প্রশ্নে কমন পড়ে
২	বলের সংযোজন ও বিভাজন	গুরুত্বপূর্ণ ও বারবার আসে
৪	বলের সাম্যবস্থা	গুরুত্বপূর্ণ ও বারবার আসে
৭	ঘর্ষণ	বারবার আসে
১০	গিয়ার ট্রেইন	বারবার আসে

📅 স্টাডি প্ল্যান (মোট সময় ঃ ১৪ ঘণ্টা) ঃ

⏱ ৩.৫ ঘণ্টা → অধ্যায় ২ (বলের সংযোজন ও বিভাজন) ও অধ্যায় ৪ (বলের সাম্যবস্থা)

⏱ ১ ঘণ্টা → অধ্যায় ৫ (ভরকেন্দ)

⏱ ৩.৫ ঘণ্টা → অধ্যায় ৭ (ঘর্ষণ) ও অধ্যায় ১০ গিয়ার ট্রেইন)

⏱ ৬ ঘণ্টা → অধ্যায় ১, ৩, ৬, ৮ ও ৯ অধ্যায়গুলো রিভিশন

🎯 পাস বুকের প্রধান লক্ষ্য ঃ

✅ দ্রুত রিভিশনের সুবিধা- পরীক্ষার আগে সময় বাঁচায়

✅ গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন- উত্তরের সংক্ষিপ্ত বিন্যাস

✅ সারাংশভিত্তিক সাজানো- এক নজরে পুরো বিষয়টা দেখে ফেলা

✅ মূল টপিক ফোকাস- আত্মবিশ্বাস গড়ে তোলার সহায়ক

📌 বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

☞ এটি একটি পূর্ণাঙ্গ টেক্সটবুক নয়- বরং সঠিক সময় ব্যবস্থাপনার রিভিশন গাইড।

☞ পরীক্ষার আগের "last moment" প্রস্তুতির জন্য উপযুক্ত সহকারী!

অধ্যায়-১ মৌলিক বলবিদ্যা

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

*** ১। মেকানিক্স বা বলবিদ্যা বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০১২

উত্তর ঃ পদার্থবিজ্ঞানের যে শাখায় বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল এবং এর প্রভাব সম্পর্কে আলোচনা করা হয় তাকে মেকানিক্স বা বলবিদ্যা বলে।

***** ২। ফলিত বিজ্ঞান বা ফলিত বলবিদ্যা (Applied Mechanics) বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০০৯, ১১, ১২, ২৩

উত্তর ঃ ফলিত বলবিদ্যা হলো যেকোনো পদার্থের গতির সাথে জড়িত বিজ্ঞানের একটি শাখা যা ইন্সট্রুমেন্টের সাহায্য ছাড়াই মানুষ অনুভব বা উপলব্ধি করতে পারে। সংক্ষেপে যখন বলবিদ্যার ধারণাগুলি তাত্ত্বিক হওয়াকে ছাড়িয়ে যায় এবং প্রয়োগ ও সম্পাদিত হয়, তখন সাধারণ বলবিদ্যা ফলিত বলবিদ্যায় পরিণত হয়। ফলিত বলবিদ্যার লক্ষ্য হলো বিভিন্ন প্রযুক্তিগত সমস্যার সমাধান করা।

৩। ইঞ্জিনিয়ারিং বলবিদ্যা (Engineering Mechanics) বলতে কী বুঝায়?

উত্তর ঃ ইঞ্জিনিয়ারিং মেকানিক্স বলতে সাধারণত ইনঞ্জিনিয়ারিং উপাদানগুলির (Elements) সাথে জড়িত সমস্যাগুলি সমাধান করতে মেকানিক্স বা বলবিদ্যা প্রয়োগকে বুঝায়। সহজভাবে বলতে গেলে, বলবিদ্যার যে শাখায় সাধারণত ইঞ্জিনিয়ারিং কাজের সাথে সম্পর্কযুক্ত বিভিন্ন সমস্যা নিরসনের উদ্দেশ্যে বিভিন্ন

সূত্র ও নীতিসমূহ উদ্ভাবন এবং এদের প্রয়োগ পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়, তাকে ইনজিনিয়ারিং বলবিদ্যা বলা হয়।

*** ৪। স্থিতিবিদ্যা (Statics) বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০১৯

উত্তর ঃ ইনজিনিয়ারিং মেকানিক্সের যে অংশে স্থিতিশীল বস্তুর (In Rest Bodies) উপর প্রযুক্ত বল এবং এর প্রভাব নিয়ে আলোচনা করা হয়, তাকে স্থিতি বলবিদ্যা বা Statics বলে।

৫। মৌলিক একক (Fundamental Unit) কী? বাকাশিবো- ২০২০

উত্তর ঃ যে সকল একক অন্য কোনো এককের উপর নির্ভর করে না তাদেরকে মৌলিক একক বলে। যেমন ঃ দৈর্ঘ্য, ভর, সময় ইত্যাদি।

৬। যৌগিক একক (Compound Unit) কী?

উত্তর ঃ যে সকল একক মৌলিক এককের উপর নির্ভরশীল অর্থাৎ মৌলিক এককের প্রভাবে যে এককের মানের পরিবর্তন হয়, তাকে যৌগিক একক বলে। যেমন ঃ বল, কাজ, ক্ষেত্রফল, আয়তন ইত্যাদি।

৭। অভিকর্ষীয় একক (Gravitational Unit)-এর সংজ্ঞা দাও।

বাকাশিবো- ২০১২

উত্তর ঃ যে একককে প্রকাশ করার জন্য অভিকর্ষজ ত্বরণের প্রভাব চিন্তা করা হয় না, তাকে অভিকর্ষীয় একক বলে।

যেমন ঃ অভিকর্ষীয় এককে বলের একক $(kg\text{-}f)$

নোট ঃ $1\ \text{kg-}f = 1\ \text{kg} \times 9.81\ \text{m/sec}^2 = 9.81\ \text{N}$

৮। এসআই (SI) একক বলতে কী বুঝায়? বাকাশিবো- ২০১২

উত্তর ঃ এসআই একক হলো আন্তর্জাতিক পদ্ধতির একক। এটি একটি সুসঙ্গত একক ব্যবস্থা যা বিশ্বব্যাপী বিজ্ঞান, প্রকৌশল এবং বাণিজ্যে ব্যবহৃত হয়। এসআই একক গুলি সাতটি মৌলিক একক এবং তাদের উপর ভিত্তি করে গঠিত অন্যান্য যৌগিক বা লব্ধ একক নিয়ে গঠিত।

এসআই এককে বলের একক নিউটন (N). $1\ N = 1\ kg\text{-}m/s^2$

SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

*** ১। বলের একক নিউটন (N) ও কেজি (kg) এর মাঝে সম্পর্ক নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০১২

উত্তর ঃ আমরা জানি, অভিকর্ষীয় একক অভিকর্ষজ ত্বরণের প্রভাবমুক্ত। তাই বলের অভিকর্ষীয় একক হলো kg. আবার বলের এস.আই একক বা পরম একক হলো নিউটন (N).

আমরা জানি, $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\ m/s^2}$

সুতরাং আমরা বলের অভিকর্ষীয় এককের সাথে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান গুণ করলেই বলের এস.আই একক নির্ণয় করতে পারবো।

$$\therefore 1\ \mathrm{kg} = 1 \times \mathrm{g}\ (\mathrm{kg\text{-}m/s^2})$$
$$= 1 \times 9.81\ (\mathrm{kg\text{-}m/s^2}) \qquad [\mathrm{g} = 9.81\ \mathrm{m/s^2}]$$
$$= 9.81\ \mathrm{N}$$

এটাই বলের একক N এবং kg এর মধ্যে নির্ণেয় সম্পর্ক।

অধ্যায়-২ বলের সংযোজন ও বিভাজন

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। বল বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০০৪, ১১'পরি, ১৭, ১৭'পরি

উত্তর ঃ বল একটি বাহ্যিক কারণ, যা কোনো স্থির বস্তুর উপর প্রয়োগ করা হলে বস্তুটিকে গতিশীল করে বা করতে চায় এবং গতিশীল বস্তুর উপর প্রয়োগ করা হলে গতির মান ও দিক পরিবর্তন করে বা করতে চায়। বল একটি ভেক্টর রাশি। একে প্রকাশ করতে মান ও দিক উভয়েরই প্রয়োজন হয়।

*** ২। 10 নিউটন বল কথাটির অর্থ কী?** বাকাশিবো- ২০১১'পরি

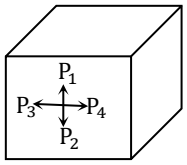
উত্তর ঃ 10 নিউটন (N) বল কথাটির অর্থ হলো, যে পরিমাণ বল 1 kg বস্তুর উপর প্রয়োগ করলে বস্তুটি $10\ m/sec^2$ ত্বরণ অর্জন করে, তার মান 10 নিউটন বা 10 N.

অথবা, যে পরিমাণ বল 10 kg বস্তুর উপর প্রয়োগ করলে বস্তুটি $1\ m/sec^2$ ত্বরণ অর্জন করে, তার মান 10 নিউটন।

**** ৩। বলের পদ্ধতি (Force System) বলতে কী বুঝায়?**
অথবা, বল ব্যবস্থা বলতে কী বুঝায়? বাকাশিবো- ২০১১, ২৩

উত্তর ঃ যখন দুই বা ততোধিক বল কোনো একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে, তখন তাকে বল ব্যবস্থা বা বলের পদ্ধতি বা ফোর্স সিস্টেম বলে।

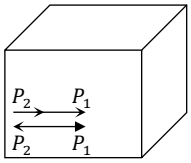
৪। সমকেন্দ্রিক বল (Concurrent Force) বলতে কী বুঝায়?



উত্তর ঃ কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বলসমূহ যখন বস্তুটির একই বিন্দুতে মিলিত হয়ে কাজ করে, তখন ঐ বলসমূহকে সমকেন্দ্রিক বল বলে।

**** ৫। সমরৈখিক বল (Collinear Force) বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০১৫, ১৭



উত্তর ঃ কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল যে বলসমূহের ক্রিয়ারেখা একই রেখায় থাকে (একই দিকে বা বিপরীত দিকে) তারা সমরৈখিক বল হিসাবে পরিচিত।

***** ৬। লব্ধি বল (Resultant Force) বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৯, ১২, ১২'পরি, ১৩, ১৪, ১৫, ১৫'পরি, ১৮, ২০, ২১'পরি

উত্তর ঃ একাধিক বলকে একটি বলে রূপান্তর করলে যে বল পাওয়া যায়, তাকে লব্ধি বল বলে। অর্থাৎ একাধিক বল কোনো একটি বস্তুর উপর যে প্রভাব ফেলবে, যে বল এককভাবে বস্তুর উপর ঐ একই প্রভাব ফেলে, তাকে ঐ বলগুলোর লব্ধি বল বলে। একে সাধারণত R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

৭। লব্ধি বল নির্ণয় পদ্ধতি কী কী? বাকাশিবো- ২০১১'পরি, ২২

উত্তর ঃ লব্ধি বল নির্ণয়ের পদ্ধতি দুইটি। যথা-

(i) বৈশ্লেষিক পদ্ধতি (Analytical Method) ঃ

(ক) বলের সামন্তরিক সূত্র

(খ) বলের বিভাজন পদ্ধতি

(ii) লেখচিত্র পদ্ধতি (Graphical Method) ঃ

(ক) বলের ত্রিভুজ সূত্র

(খ) বলের বহুভুজ সূত্র

(গ) ভেক্টর পদ্ধতি

**** ৮। বলের সংযোজন বলতে কী বুঝায়?** **বাকাশিবো- ০০৯, ১৭'পরি**

উত্তর ঃ কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল একাধিক বলকে একটি বলে অর্থাৎ লব্ধি বলে রূপান্তর করাকেই বলের সংযোজন বলে। অর্থাৎ বলের ভেক্টর যোগফলকেই বলের সংযোজন বলে।

**** ৯। বলের বিভাজন বলতে কী বুঝায়?** **বাকাশিবো- ১৪'পরি, ১৯'পরি, ২০, ২১**

উত্তর ঃ একটি বলকে বিভিন্ন উপাংশে বিভক্ত করাকে বলের বিভাজন বলে। দ্বিমাত্রিক সিস্টেমে দুইটি উপাংশ থাকে, যথা- অনুভূমিক উপাংশ (Horizontal Component) এবং উল্লম্ব উপাংশ (Vertical Component)

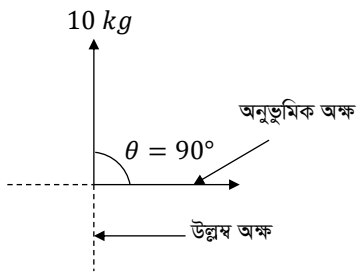
**** ১০। অনুভূমিকের সাথে 90° কোণে ক্রিয়ারত 10 কেজি বলের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশের মান কত?** **বাকাশিবো- ২০০৯**

উত্তর ঃ এখানে, বল $F = 10\ kg$

সুতরাং F বলের অনুভূমিক উপাংশ $= F\cos\theta$

$= 10\cos 90°$

$= 0 \qquad [\because \cos 90° = 0]$



এবং F বলের উল্লম্ব উপাংশ $= F \sin\theta$

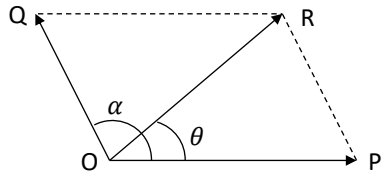
$$= 10 \sin 90^\circ$$

$$= 10\ kg \quad [\because \sin 90^\circ = 1]$$

***** ১১। বলের সামন্তরিক সূত্রটি লেখ।**

বাকাশিবো- ২০০৫, ১০, ১৪, ১৯'পরি, ২০, ২০'পরি

উত্তর ঃ একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলকে সামন্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা প্রকাশ করা হলে, ঐ দুইটি বাহুর ছেদবিন্দু হতে অঙ্কিত কর্ণ ঐ দুইটি বলের লব্ধি বলকে নির্দেশ করে।



$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

**** ১২। বলের ত্রিভুজ সূত্রটি লেখ।** বাকাশিবো- ২০১০, ১৫, ১৬'পরি, ১৯'পরি

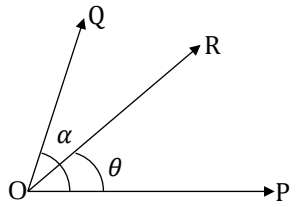
উত্তর ঃ বলের ত্রিভুজ সূত্র (Triangle Law of Forces) ঃ যদি ত্রিভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি বলের মান ও দিক নির্দেশ করা হয় তাহলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু ঐ দুইটি বলের লব্ধি বলের মান ও দিক নির্দেশ করে।

*** ১৩। সামন্তরিকের সূত্রের সাহায্যে লব্ধি নির্ণয়ের সূত্রটি লেখ।**

বাকাশিবো- ২০১০'পরি

উত্তর ঃ যদি P ও Q বলদ্বয় α কোণে কাজ করে, তবে তাদের লব্ধি বলের মান হবে- $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

এবং লব্ধির দিক হবে- $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$



*** ১৪। স্পেস ডায়াগ্রাম (Space Diagram) কাকে বলে?**

বাকাশিবো- ২০০৯'পরি, ১১

উত্তর ঃ কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বলসমূহের ক্রিয়ারেখা বরাবর সুবিধামতো স্কেলে অঙ্কিত চিত্রকে স্পেস ডায়াগ্রাম (Space Diagram) বলা হয়। এই ডায়াগ্রামে বলের কোণ সঠিক করে ইচ্ছামতো স্কেলে চিত্র অঙ্কিত হয়।

SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

**** ১। বস্তুর উপর বলের প্রভাব উল্লেখ কর।** বাকাশিবো- ২০১৯, ২০

উত্তর ঃ বস্তুর উপর বলের প্রভাবসমূহ নিম্নে উল্লেখ করা হলো ঃ

i) এটি স্থির বস্তুর উপর প্রয়োগ করা হলে বস্তুটি গতিপ্রাপ্ত হয় বা গতির উপক্রম হয়।

ii) এটি গতিশীল বস্তুর গতিবেগ বৃদ্ধি করে বা হ্রাস করে।

iii) চলমান বস্তুর উপর এটি ক্রিয়া করে বস্তুকে স্থির অবস্থায় আনয়ন করে।

iv) এটি যখন বস্তুর উপর ক্রিয়া করে তখন বস্তুর অভ্যন্তরে পীড়নের সৃষ্টি হয়, এবং বস্তুটি কিছুটা বিকৃত হয়।

***** ২। বলের বৈশিষ্ট্যগুলো বর্ণনা কর।** বাকাশিবো- ২০১৩, ১৪, ১৬, ২০, ২১'পরি

উত্তর ঃ বলের কয়েকটি মূল বৈশিষ্ট্য রয়েছে। নিম্নে এগুলোর সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দেওয়া হলো ঃ

i) বলের মান (Magnitude of Force) ঃ এটি একটি বলের সাইজ অথবা সামর্থ্য বর্ণনা করে। সাধারণত নিউটন, কেজি ইত্যাদি এককে বল পরিমাপ করা হয়।

ii) বলের দিক (Direction of Force) ঃ এটি যে পথে বল প্রয়োগ করা হয়েছে তা নির্দেশ করে। একটি বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল একাধিক বলের সামগ্রিক প্রভাব বোঝার জন্য এটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

iii) বলের ক্রিয়াবিন্দু (Point of Application of the Force) ঃ এটি একটি বস্তুর উপর বলকে যে অবস্থানে প্রয়োগ করা হয়, তা নির্দেশ করে।

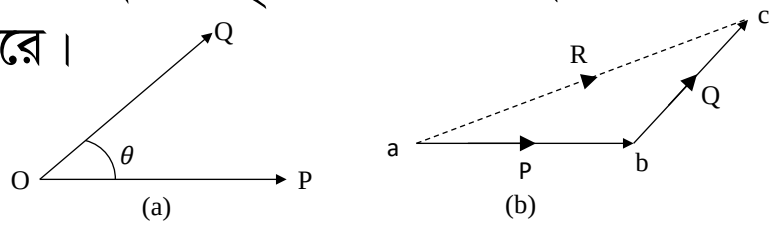
iv) লব্ধি বল (Resultant Force) ঃ যখন একাধিক বল একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে, তখন তাদের সম্মিলিত প্রভাবকে যে একক বলের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়, তাকে ঐ বলসমূহের লব্ধি বল বলে।

v) বলের প্রকৃতি (Nature of the Force) ঃ এটি কী ধরনের বল হবে তা নির্দেশ করে। যেমন ঃ টানা বল (Pull Force) বা ধাক্কা বল (Push Force) ইত্যাদি।

vi) সংযোগ এবং অসংযোগ বল (Contact and Non-Contact Force) ঃ বলগুলো সংযোগ বল হতে পারে (বস্তুর সাথে লেগে ক্রিয়াশীল অবস্থা) অথবা অসংযোগ বল হতে পারে (একটি দূরত্বে থেকে ক্রিয়াশীল অবস্থা, যেমন ঃ চৌম্বক বল, মাধ্যাকর্ষণ বল)।

***** ৩। বলের ত্রিভুজ সূত্রটি চিত্রসহ বর্ণনা কর।** বাকাশিবো- ২০১৮, ১৯, ২০, ২২

উত্তর ঃ যদি ত্রিভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি বলের মান ও দিক নির্দেশ করা হয় তাহলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু ঐ দুইটি বলের লব্ধি বলের মান ও দিক নির্দেশ করে।

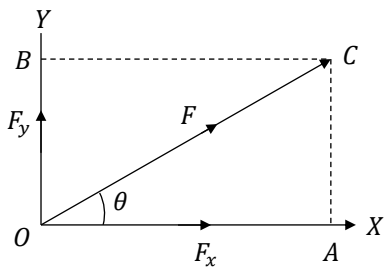


(a) চিত্রে O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বল P ও Q দেখানো হয়েছে, যার মধ্যবর্তী কোণ θ. এখন $\overrightarrow{OP}$ বলের সমান ও সমান্তরাল করে যেকোনো স্কেলে ab রেখা অঙ্কন করি। তারপর ab রেখার শেষ বিন্দু b হতে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে $\overrightarrow{OQ}$ বলের সমান bc রেখা অঙ্কন করি এবং a ও c পয়েন্টকে সংযোগ করি, যা চিত্র (b)-তে দেখানো হয়েছে। তহলে ac রেখার মানই হবে P এবং Q বলের লব্ধি বলের মান R এবং এর দিক হবে ab ও ac যে ক্রমে অগ্রসর হয়েছে তার বিপরীত দিকে।

**** ৪। উপাংশ নির্ণয়ের সূত্র প্রতিপাদন কর।** বাকাশিবো-২০১৮'পরি, ১৯'পরি, ২০

উত্তর ঃ মনে করি, O বিন্দুতে একটি বল F আনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়া করছে। চিত্রে OC রেখা দ্বারা F বলকে নির্দেশ করা হয়েছে। ধরি F বলের আনুভূমিক উপাংশ $= F_x$ এবং F বলের উল্লম্ব উপাংশ $= F_y$

চিত্র হতে পাই,



$$F_x = OA = BC$$
$$F_y = OB = AC$$

এবং $\Delta OAC = \Delta OBC$

ΔOAC হতে, $\angle AOC = \theta$

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$

বা, $\sin\theta = \frac{AC}{OC} = \frac{OB}{OC}$ $[\because AC = OB]$

বা, $\sin\theta = \frac{F_y}{F}$

$\therefore F_y = F\sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

আবার, $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$

বা, $\cos\theta = \frac{OA}{OC}$

বা, $\cos\theta = \frac{F_x}{F}$

$\therefore F_x = F\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (ii)

সমীকরণ (i) এবং সমীকরণ (ii) দ্বারা একটি বলের উপাংশ নির্ণয়ের সূত্র প্রতিপাদিত হয়।

*** ৫। বিভাজন পদ্ধতিতে সমতলীয় বলসমূহের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়ের ধাপগুলো লেখ।** বাকাশিবো- ২০১৯

উত্তর ঃ বলের বিভাজন পদ্ধতিতে সমতলীয় বলসমূহের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়ের ধাপগুলো নিম্নে দেওয়া হলো ঃ

১. প্রথমে বলসমূহের অনুভূমিক উপাংশের বীজগণিতিক যোগফল $(\sum F_x)$ নির্ণয় করতে হবে।

২. তারপর সকল বলসমূহের উল্লম্ব উপাংশের বীজগণিতিক যোগফল $(\sum F_y)$ নির্ণয় করতে হবে।

৩. তারপর নিম্নের সূত্রানুযায়ী লব্ধি বল, R নির্ণয় করতে হবে। $R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$

৪. অনুভূমিকের সাথে লব্ধি বলের হেলানো কোণ নিচের সূত্রানুযায়ী নির্ণয় করতে হবে। $\theta = \tan^{-1}\frac{\sum F_y}{\sum F_x}$

৫. লব্ধি বলের প্রকৃত কোণ α নির্ণয় করতে হবে।

*** ৬। বলের পদ্ধতিগুলোর নাম লেখ।** **বাকাশিবো- ২০০৪**

উত্তর ঃ নিম্নে বলের পদ্ধতিগুলোর নাম উল্লেখ করা হলো ঃ

১. সমতলীয় বলসমূহ (Coplanar Forces)

২. অসমতলীয় বলসমূহ (Non-Coplanar Forces)

৩. সমতলীয় সমরৈখিক বলসমূহ (Coplanar Collinear Forces)

৪. সমতলীয় সমকেন্দ্রিক বলসমূহ (Coplanar Concurrent Forces)

৫. সমতলীয় সমান্তরাল বলসমূহ (Coplanar Parallel Forces)

৬. সমতলীয় অসমকেন্দ্রিক এবং অসমান্তরাল বলসমূহ (Coplanar Non-Concurrent and Non-Parallel Forces)

৭. অসমতলীয় সমকেন্দ্রিক বলসমূহ (Non-Coplanar Concurrent Forces)

৮. অসমতলীয় সমান্তরাল বলসমূহ (Non-Coplanar Parallel Forces)

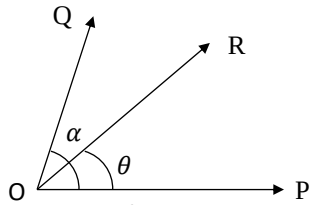
৯. অসমতলীয় অসমকেন্দ্রিক এবং অসমান্তরাল বলসমূহ (Non-Coplanar Non-Concurrent and Non-Parallel Forces)

SOS রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

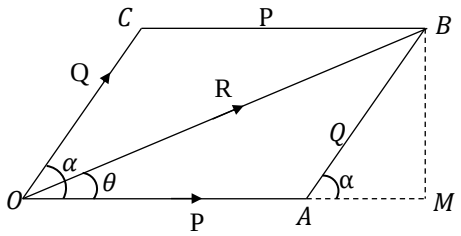
***** ১। বলের সামন্তরিক সূত্রটি লেখ এবং প্রমাণ কর।**

বাকাশিবো- ২০১০, ১৩'পরি, ১৬'পরি, ১৭'পরি, ১৮, ১৮'পরি, ২০, ২১, ২১'পরি

উত্তর ঃ মনে করি, P ও Q দুটি বল O বিন্দুতে ক্রিয়া করছে। OA ও OC সরলরেখা এদের মান ও দিক নির্দেশ করছে এবং বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α. যদি $OACB$ সামান্তরিক সম্পূর্ণ করা হয়, তবে OB কর্ণই বল দুটির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে। চিত্রে লব্ধির মানকে R দ্বারা সূচিত করা হয়েছে। এখন OA রেখার বর্ধিতাংশের উপর B বিন্দু হতে BM লম্ব টানলে চিত্র হতে পাই,



চিত্র ঃ ১



চিত্র ঃ ২

$AB = Q$ এবং $\angle BAM = \alpha$

$sin\angle BAM = \frac{BM}{AB}$

বা, $BM = AB \sin\alpha$

বা, $BM = Q \sin\alpha$

এবং $cos\angle BAM = \frac{AM}{AB}$

বা, $AM = AB \cos\alpha$

বা, $AM = Q \cos\alpha$

ΔOBM সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$OB = R = \sqrt{OM^2 + BM^2}$ [OB কর্ণই লব্ধি R কে নির্দেশ করে]

$$= \sqrt{(OA + AM)^2 + BM^2}$$
$$= \sqrt{(P + Q\cos\alpha)^2 + (Q\sin\alpha)^2}$$
$$= \sqrt{P^2 + Q^2\cos^2\alpha + 2PQ\cos\alpha + Q^2\sin^2\alpha}$$
$$= \sqrt{P^2 + Q^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 2PQ\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}\ [\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1]$$
$$= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$\therefore$ লব্ধি $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

লব্ধির দিক নির্ণয় ঃ যদি OB রেখা OA অথবা ভূমির সাথে θ কোণে থাকে, তবে

$$\tan\theta = \frac{BM}{OM} = \frac{BM}{OA+AM} = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

[**নোট ঃ** $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ এই সূত্রে cos এর সাথে যে কোণের প্রতিক ব্যবহার হয় সেই প্রতিকটি দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণকে নির্দেশ করে]

আমরা এই বইয়ে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α দ্বারা এবং লব্ধি অনুভূমিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে θ দ্বারা নির্দেশ করেছি।

SOS গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

***** ১। দুটি বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ $180°$ হলে, লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০০৯'পরি, ১৩'পরি, ১৪'পরি, ১৫'পরি

সমাধান ঃ ধরি, বল দুটি যথাক্রমে P ও Q এবং $P > Q$

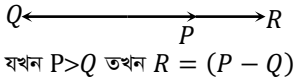
দেওয়া আছে, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 180°$

আমরা জানি, লব্ধি বল, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

বা, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180°}$

বা, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ}$

$[\cos 180° = -1]$



বা, $R = \sqrt{(P - Q)^2}$

$\therefore R = P - Q$ **(Ans.)**

লব্ধির দিক, $tan\,\theta = \frac{Q\sin 180°}{P + Q\cos 180°}$

বা, $\tan\theta = \frac{Q \times 0}{P - Q}$ $[\sin 180° = 0]$

বা, $\tan\theta = 0$

বা, $\theta = \tan^{-1} 0$

$\therefore \theta = 0°$ **(Ans.)**

২। দেখাও যে, একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে বলদ্বয়ের মানের সমষ্টি ও বিয়োগফলের সমান।

বাকাশিবো- ২০১১'পরি

সমাধান ঃ দুইটি বল যথাক্রমে P ও Q এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

আমরা জানি, লব্ধি বল, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

সূত্র হতে দেখতে পাই, লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে, যখন $\cos\alpha$ এর মান সর্বোচ্চ হয় এবং লব্ধির মান সর্বনিম্ন হবে যখন $\cos\alpha$ এর মান সর্বনিম্ন হয়।

i) $\alpha = 0°$ হলে, $\cos\alpha$ এর মান সর্বোচ্চ হয়-

$$\therefore R_{max} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0°}$$
$$= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ} \qquad [\cos 0° = 1]$$
$$= \sqrt{(P+Q)^2}$$
$$= P + Q$$

$\therefore$ লব্ধির সর্বোচ্চ মান বলদ্বয়ের যোগফলের সমান **(Showed)**

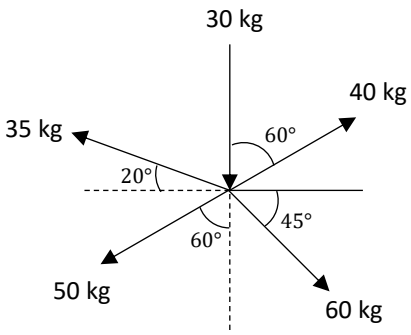
ii) $\alpha = 180°$ হলে, $\cos\alpha$ এর মান সর্বনিম্ন হয়-

$$\therefore R_{min} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180°}$$
$$= \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} \quad [\cos 180° = -1]$$
$$= \sqrt{(P-Q)^2}$$
$$= P - Q$$

$\therefore$ লব্ধির সর্বনিম্ন মান বলদ্বয়ের বিয়োগফলের সমান। **(Showed)**

*** ৩। চিত্রে প্রদর্শিত বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।**

বাকাশিবো- ২০১৫



সমাধান ঃ i) বলগুলোর অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল-

$$\overset{\rightarrow}{+}\Sigma F_x = 40\sin 60° + 60\cos 45° - 35\cos 20° - 50\sin 60°$$

[**নোট ঃ** যেই অক্ষের সাথে θ থাকবে সেই অক্ষ বরাবর বলের উপাংশে $\cos\theta$ হবে। বিপরীতক্রমে, যেই অক্ষের সাথে θ থাকবে না সেই অক্ষ বরাবর বলের উপাংশে $\sin\theta$ হবে]

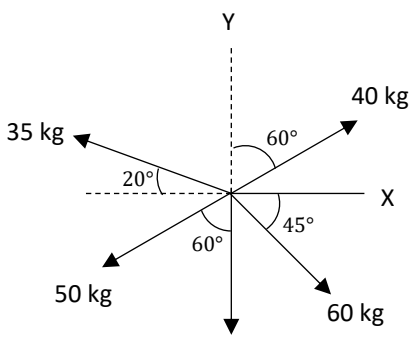
$$= 0.8769\ kg$$

(ii) বলগুলোর উল্লম্ব উপাংশের বীজগণিতিক যোগফল-

$$\overset{\uparrow}{+}\Sigma F_y = 40\cos 60° + 35\sin 20° - 50\cos 60° - 60\sin 45° - 30$$

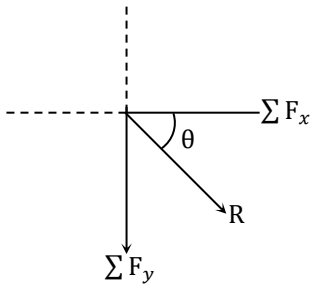
$$= -65.455\ kg$$

$$= 65.455\ kg\ (\downarrow)$$



Free Body Diagram

(iii) লব্ধি বল, $R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + \left(\Sigma F_y\right)^2}$



বা, $R = \sqrt{(0.8769)^2 + (65.455)^2}$

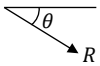
$\therefore R = 65.46\ kg$

(iv) লব্ধির দিক, $\tan\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$

বা, $\tan\theta = \frac{65.455}{0.8769}$

বা, $\theta = \tan^{-1}(74.643)$

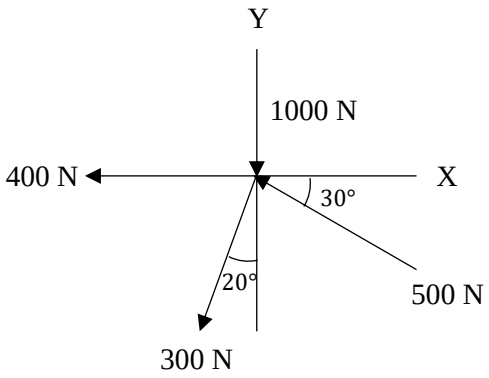
$\therefore \theta = 89.23$

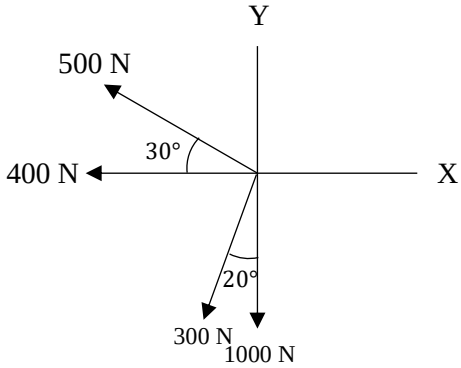


$\therefore$ লব্ধির মান, $R = 65.46\ kg$ এবং লব্ধির দিক, $\theta = 89.23°$

**** ৪। চিত্রানুযায়ী প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।**

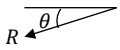
বাকাশিবো- ২০১২'পরি, ১৩'পরি, ১৪'পরি, ২০





সমাধান ঃ গাণিতিক সমাধান ৩ নং এর অনুরূপ।

Ans: লব্ধির মান, $R = 1392.916\ N$

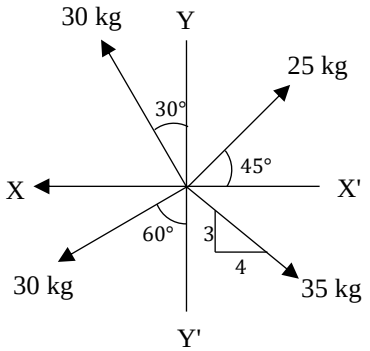
এবং লব্ধির দিক $= 47.8°$ 

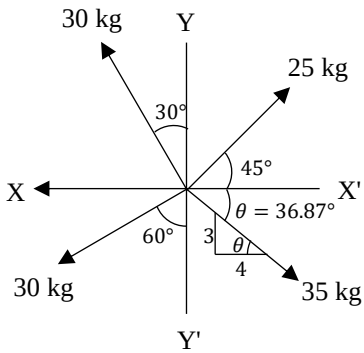
Hints

$\overset{\rightarrow}{+} \Sigma F_x = 935.62\ kg(\leftarrow)$

$\overset{\uparrow}{+} \Sigma F_y = 1031.907\ kg$

**** ৫। চিত্রানুযায়ী লব্ধির বলের মান ও দিক নির্ণয় কর। বাকাশিবো- ২০২৩**





Free Body Diagram

সমাধান ঃ (i) বলগুলোর অনুভূমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল-

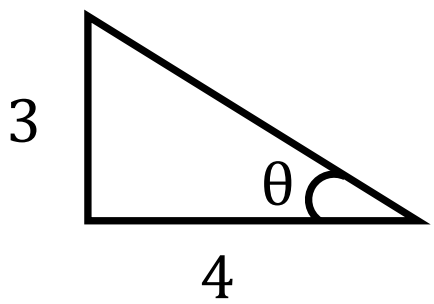
$$\overset{\rightarrow}{+}\Sigma F_x = 25\cos 45° + 35\cos 36.87° - 30\sin 30° - 30\sin 60°$$

$$= 4.7\ kg$$

(ii) বলগুলোর উল্লম্ব উপাংশের বীজগণিতিক যোগফল-

$$\overset{\uparrow}{+}\Sigma F_y = 30\cos 30° + 25\sin 45° - 30\cos 60° - 35\sin 36.87°$$

$$= 7.658\ kg$$

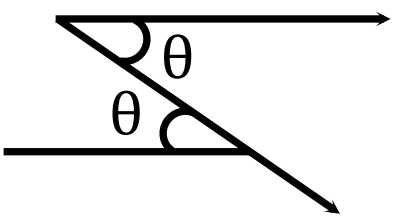


$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$\therefore \theta = 36.87°$$

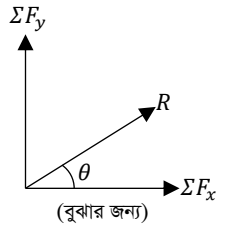


একান্তর কোণ

(iii) লব্ধি বল, $R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$

$= \sqrt{(4.7)^2 + (7.658)^2}$

$= 8.985\ kg$



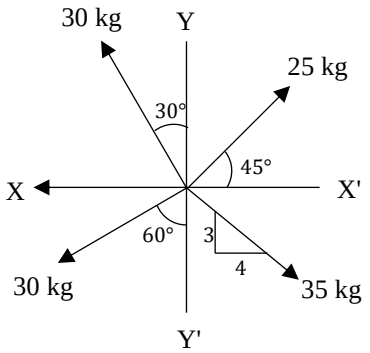
(iv) লব্ধির দিক, $\tan\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$

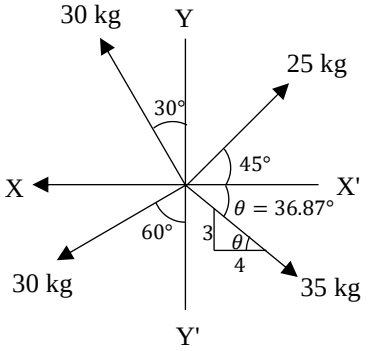
বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7.658}{4.7}\right)$

$\therefore \theta = 58.46°$ **(Ans.)**

[নোট ঃ পরীক্ষাতে চিত্রের জন্য কোনো মার্ক নেই। যত চিত্র আঁকানো হয় সবই নিজের বঝুার জন্য এবং সহজে নির্ভুলভাবে সমাধান করার জন্য**]**

**** ৬। চিত্রানুযায়ী লব্ধির বলের মান ও দিক নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০২৩





Free Body Diagram

সমাধান ঃ (i) বলগুলোর অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল-

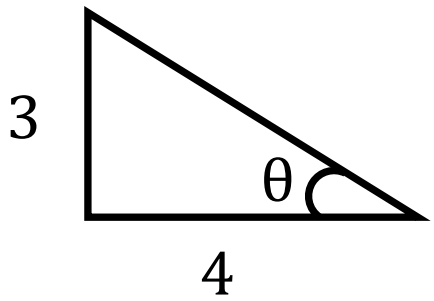
$\overset{\rightarrow}{+}\Sigma F_x = 25\cos 45° + 35\cos 36.87° - 30\sin 30° - 30\sin 60°$

$= 4.7\ kg$

(ii) বলগুলোর উল্লম্ব উপাংশের বীজগণিতিক যোগফল-

$$\overset{\uparrow}{+}\Sigma F_y = 30\cos 30° + 25\sin 45° - 30\cos 60° - 35\sin 36.87°$$

$$= 7.658\ kg$$

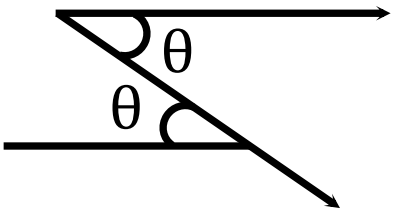


$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$\therefore \theta = 36.87°$$

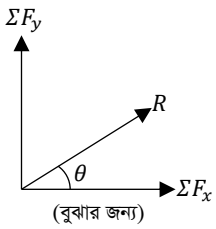


একান্তর কোণ

(iii) লব্ধি বল, $R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$

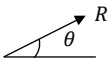
$$= \sqrt{(4.7)^2 + (7.658)^2}$$

$$= 8.985\ kg$$



(iv) লব্ধির দিক, $\tan\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$

বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7.658}{4.7}\right)$

$\therefore \theta = 58.46°$  **(Ans.)**

[নোট ঃ পরীক্ষাতে চিত্রের জন্য কোনো মার্ক নেই। যত চিত্র আঁকানো হয় সবই নিজের বুঝার জন্য এবং সহজে নির্ভুলভাবে সমাধান করার জন্য**]**

অধ্যায়-৩ বলের মোমেন্ট ও কাপল

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। বলের মোমেন্ট বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০০৪, ০৯, ০৯'পরি, ১২, ১৪, ১৪'পরি, ১৫'পরি, ১৬, ১৭, ১৮'পরি, ১৯'পরি, ২০, ২০'পরি, ২৩

উত্তর ঃ কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের প্রভাবে ঐ বস্তু কোনো একটি বিন্দু বা অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে চায় বা ঘুরতে থাকে, এই ঘূর্ণনের প্রবণতাকে ঐ বলের মোমেন্ট বলে। অর্থাৎ কোনো বিন্দু (যার সাপেক্ষে বস্তুটি ঘুরতে চায়) থেকে বলের লম্ব দূরত্ব এবং ঐ বলের গুণফলই বলের মোমেন্ট।

২। মোমেন্টের একক কী?

উত্তর ঃ মোমেন্টের একক হলো-

i) নিউটন মিটার (N-m)
ii) কেজি-মিটার (kg-m)
iii) কেজি-সে.মি (kg-cm)
iv) ডাইন-সে.মি (dyne-cm) ইত্যাদি।

MKS অথবা SI পদ্ধতিতে মোমেন্টের একক নিউটন-মিটার (N-m)
CGS পদ্ধতিতে মোমেন্টের একক ডাইন-সেন্টিমিটার (dyne-cm)

**** ৩। ধনাত্মক ও ঋনাত্মক মোমেন্ট বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০১৯, ১৯'পরি, ২০

উত্তর ঃ ধনাত্মক মোমেন্ট ঃ নির্দিষ্ট দূরত্ব হতে কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল যদি বস্তুকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরায় বা ঘুরাতে চায়, তাহলে বলের এরূপ মোমেন্টকে ধনাত্মক মোমেন্ট বলে।

ঋণাত্মক মোমেন্ট ঃ নির্দিষ্ট দূরত্ব হতে কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল যদি বস্তুকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরায় বা ঘুরাতে চায়, তাহলে বলের এরূপ মোমেন্টকে ঋণাত্মক মোমেন্ট বলে।

***** ৪। ভেরিগনের মোমেন্ট নীতিটি লেখ।** বাকাশিবো- ২০০৬, ১০

উত্তর ঃ যদি কোনো বস্তুর উপর একাধিক বল ক্রিয়া করে তাহলে কোনো একটি বিন্দু হতে ঐ বলগুলোর মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল, ঐ একই বিন্দুর সাপেক্ষে উক্ত বল সমূহের লব্ধির মোমেন্টের সমান হবে।

অর্থাৎ- লব্ধি বলের মোমেন্ট = বলগুলোর মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল

**** ৫। বলের মোমেন্টের সূত্র লেখ।** বাকাশিবো- ২০১১, ১৬, ২১'পরি

উত্তর ঃ কোনো একটি বস্তুর উপর একাধিক বল ক্রিয়া করার ফলে যদি বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে যেকোনো বিন্দু বা ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে বলগুলোর মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য হবে। অর্থাৎ সকল ধনাত্মক মোমেন্টের মান অবশ্যই সকল ঋণাত্মক মোমেন্টের মানের সমান হবে।

***** ৬। কাপল বা যুগল বা জোড় বা যুগল বল বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৮, ১৩'পরি, ১৫'পরি, ১৮, ১৯, ২২

উত্তর ঃ দুইটি সমান ও সমান্তরাল বল যখন কোনো একটি বস্তুর দুই ভিন্ন বিন্দুতে একটি অপরটির বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে, কিন্তু তাদের ক্রিয়ারেখা একই রেখা বরাবর থাকে না তখন তাদেরকে কাপল বলে। কাপল সৃষ্টিকারী বল দুটির ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্বকে কাপলের বাহু (Arm of Couple) বলে।

৭। লিভার বলতে কী বুঝায়? লিভার কত প্রকার ও কী কী?

উত্তর ঃ লিভার হলো একটি সাধারণ মেশিন, যা একটি স্থির কবজা বা ফালক্রামে আটকানো/পিভোট (Pivot) করা একটি বিম বা অনমনীয় (Rigid) রড নিয়ে গঠিত। ইহা একটি রিজিড বডি, যা নিজেই একটি বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরতে সক্ষম।লিভার দুই প্রকার। যথা-

i. সরল লিভার (Simple Lever) ও
ii. যৌগিক লিভার (Compound Lever).

*** ৮। লিভারের নীতি কী?** **বাকাশিবো- ২০০০, ১৩'পরি, ১৪, ১৪'পরি, ১৫, ১৫'পরি**

উত্তর ঃ বল × বল প্রয়োগের স্থান হতে ফালক্রামের দূরত্ব = ভার × ভারের অবস্থান হতে ফালক্রামের দূরত্ব অর্থাৎ বল × বল বাহুর দৈর্ঘ্য = ভার × ভার বাহুর দৈর্ঘ্য। এটাই হলো লিভারের নীতি।

***** ৯। লিভারের যান্ত্রিক সুবিধা ও লিভারেজ বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৫, ০৮, ০৯, ১৩'পরি, ১৪, ১৮, ২১, ২১'পরি

উত্তর ঃ সরল লিভারের প্রযুক্ত বল P এবং লোড W এর অনুপাতকে লিভারের যান্ত্রিক সুবিধা বলে।

অর্থাৎ, $\frac{\text{লোড}}{\text{প্রযুক্ত বল}} = \frac{W}{P}$ কে লিভারে যান্ত্রিক সুবিধা বলে।

সরল লিভারের বল বাহু a এবং লোড বাহু b এর অনুপাতকে লিভারেজ বলে। অর্থাৎ, $\frac{\text{প্রযুক্ত বলের বাহু}}{\text{লোডের বাহু}} = \frac{a}{b}$

**** ১০। লিভারের যান্ত্রিক সুবিধা কীভাবে বৃদ্ধি করা যায়?** বাকাশিবো-২০০৪, ১৪

উত্তর ঃ লিভারের যান্ত্রিক সুবিধা বৃদ্ধি করতে হলে প্রযুক্ত বলের বাহুর দৈর্ঘ্যকে বাড়াতে হবে অথবা লোড বাহুর দৈর্ঘ্য কমাতে হবে।

SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। ভেরিগনের মোমেন্ট নীতিটি/উপপাদ্যটি ব্যাখ্যা/বিবৃত/প্রমাণ/বর্ণনা কর।** বাকাশিবো- ২০০৯'পরি, ১৫, ১৫'পরি, ১৬'পরি, ১৯, ২০, ২১, ২২, ২৩

উত্তর ঃ ভেরিগনের মোমেন্ট নীতি ঃ যদি কোনো বস্তুর উপর একাধিক বল ক্রিয়া করে তাহলে কোনো একটি বিন্দু হতে ঐ বলগুলোর মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল, ঐ একই বিন্দুর সাপেক্ষে উক্ত বলসমূহের লব্ধির মোমেন্টের সমান হবে। অর্থাৎ

লব্ধি বলের মোমেন্ট = বল গুলোর মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি, P এবং Q বল দুটি A বিন্দুতে ক্রিয়া করে R লব্ধি সৃষ্টি করেছে। সামান্তরিকের সূত্রানুযায়ী AD কর্ণ P এবং Q বল দুটির লব্ধি নির্দেশ করছে। O বিন্দুটি এদের সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দু। এখন AB রেখার সমান্তরাল করে OC রেখা টানি এবং OA এবং AB যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, O বিন্দুর সাপেক্ষে R লব্ধি বলের মোমেন্ট $= P$ বলের মোমেন্ট $+Q$ বলের মোমেন্ট।

মোমেন্টের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা অনুসারে ঃ

O বিন্দুর সাপেক্ষে, P বলের মোমেন্ট $= 2 \times AOB$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

O বিন্দুর সাপেক্ষে, Q বলের মোমেন্ট $= 2 \times AOC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

O বিন্দুর সাপেক্ষে, R বলের মোমেন্ট $= 2 \times AOD$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

চিত্র হতে আমার পাই,

AOD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= AOC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $+AOB$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

কিন্তু ACD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= ABD$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= AOB$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল। (একই ভূমি এবং একই উচ্চতাসম্পন্ন ত্রিভুজ বলে)

$\therefore AOD$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= AOB$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $+AOC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

উভয় পার্শ্বকে 2 দ্বারা গুণ করে,

$2 \times AOD$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= 2 \times AOC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $+2 \times AOB$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

$\therefore R$ লব্ধি বলের মোমেন্ট $= P$ বলের মোমেন্ট $+Q$ বলের মোমেন্ট।

*** ২। বল ও মোমেন্টের মাঝে পার্থক্য লেখ।** বাকাশিবো- ২০১৭

উত্তর ঃ বল ও মোমেন্টের মাঝে পার্থক্য নিম্নে দেওয়া হলো ঃ

বল	মোমেন্ট
১) বল একটি বাহ্যিক কারণ, যা কোনো স্থির বস্তুর উপর প্রয়োগ করা হলে বস্তুটিকে গতিশীল করে বা করতে চায় এবং গতিশীল বস্তুর উপর প্রয়োগ করা হলে গতির মান ও দিক পরিবর্তন করে বা করতে চায়।	১) একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে লম্ব দূরত্বে একটি বল যদি কোনো বস্তুকে ঘুরায় বা ঘুরাতে চায়, তাহলে ঐ ঘুরানোর প্রবণতার পরিমাণকে ঐ প্রযুক্ত বলের মোমেন্ট বা ভ্রামক বলে।
২) এটি একটি ভেক্টর রাশি এবং একে সাধারণত F দ্বারা প্রকাশ করা হয়।	২) এটি একটি ভেক্টর রাশি এবং একে সাধারণত M দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
৩) এটির একক নিউটন (N)	৩) এটির একক নিউটন-মিটার $(N-m)$
৪) বলের প্রভাবে বস্তুর গতির পরিবর্তন সাধিত হয়।	৪) মোমেন্টের প্রভাবে বস্তুর ঘূর্ণন প্রবণতা বৃদ্ধি বা হ্রাস পায়।

***** ৩। যুগল বা জোড়ের ধর্মগুলো/বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ।**

বাকাশিবো- ২০০৮, ০৯'পরি, ১০, ১১, ১১'পরি, ১৩'পরি, ১৬'পরি

উত্তর ঃ কাপল বা জোড়ের ধর্মগুলো/বৈশিষ্ট্য নিম্নে দেওয়া হলো-

i) কাপল সৃষ্টিকারী বল দুইটির বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য হবে।

ii) কাপল সৃষ্টিকারী বল দুটির সমতলে অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর সাপেক্ষে কাপলের মান সর্বদা সমান থাকে। অর্থাৎ কাপল=বল ×বল দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব।

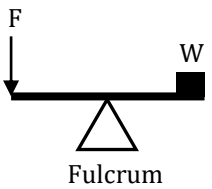
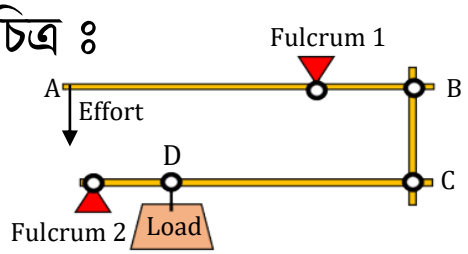
iii) একটি কাপল, একই মানের কিন্তু বিপরীত ডিরেকশনের অন্য আরেকটি কাপল দ্বারা ভারসাম্য অর্জন করতে পারে।

iv) যেকোনো সংখ্যক সমতলীয় কাপলকে একটি একক কাপলে পরিণত করা যেতে পারে, যার মান ঐ সমস্ত কাপলগুলোর মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফলের সমান হবে।

**** ৪। সরল লিভার ও যৌগিক লিভারের মাঝে পার্থক্য চিত্রসহ বর্ণনা কর।**

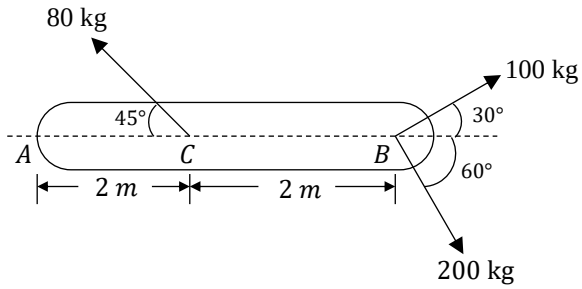
বাকাশিবো- ২০১৩, ২১'পরি

উত্তর ঃ নিম্নে সরল লিভার ও যৌগিক লিভারের মাঝে পার্থক্য দেওয়া হলো ঃ

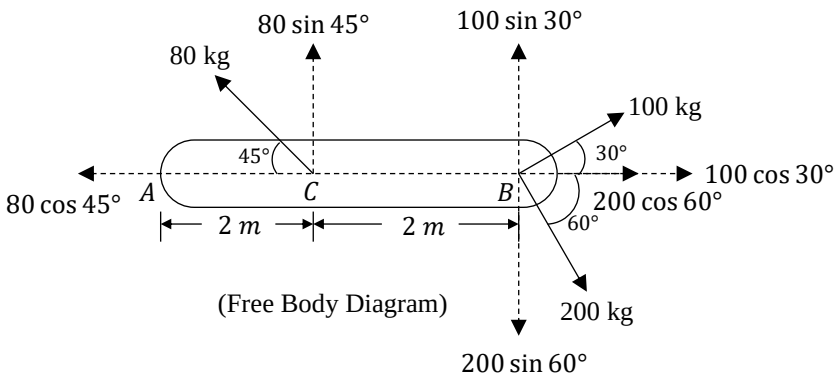
সরল লিভার	যৌগিক লিভার
১) এটি একটা বার বা দন্ড নিয়ে গঠিত।	১) এটি দুই বা ততোধিক সরল লিভার নিয়ে গঠিত।
২) একটিমাত্র ফালক্রাম থাকে।	২) একাধিক ফালক্রাম থাকতে পারে।
৩) যান্ত্রিক সুবিধা কম।	৩) যান্ত্রিক সুবিধা বেশি।
৪) চিত্র ঃ 	৪) চিত্র ঃ 

SOS গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

***** ১। চিত্রে AB একটি লিভারে বল প্রয়োগের দিক ও পরিমাণ দেওয়া আছে। লিভারের A বিন্দুতে মোমেন্ট নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০১৫, ২১



সমাধান ঃ



A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই-

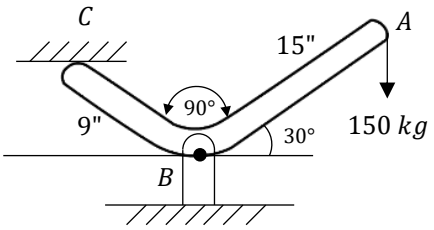
$$(+\quad \Sigma mA = (80\sin 45° \times 2) + (100\sin 30° \times 5) - (200\sin 60° \times 5) = -502.88\ kg - m$$

$$= 502.88\ kg - m\ +)$$ **(Ans.)**

[নোট ঃ $(-ve)$ চিহ্ন দ্বারা বুঝায়, আমরা যে Anticlockwise Direction ধরে নিয়েছিলাম, সেটা ভুল। প্রকৃতপক্ষে লিভারটি A বিন্দুর সাপেক্ষে Clockwise ঘুরবে]

**** ২। চিত্রানুযায়ী B ও C বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় কর।**

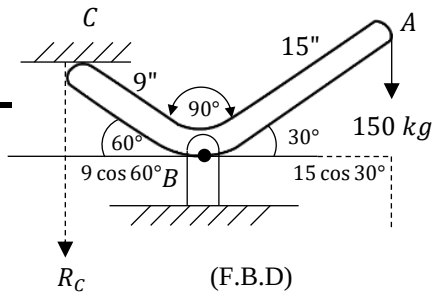
বাকাশিবো- ২০১৬

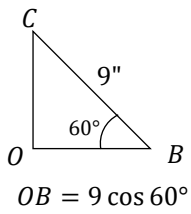


সমাধান ঃ **Tips:** এই সকল ম্যাথে পিন সাপোর্টে পয়েন্টের সাপেক্ষে প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ার রেখার (Line of Action) লম্ব দূরত্ব বের করে মোমেন্ট নিয়ে অজানা মান বের করলে, ম্যাথটা সহজে সমাধান করা যায়।

(i) B বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই-

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0$





বা, $(150 \times 15\cos 30°) - (R_C \times 9\cos 60°) = 0$

বা, $R_C \times 4.5 = 1948.557$

বা, $R_c = \dfrac{1948.557}{4.5}$

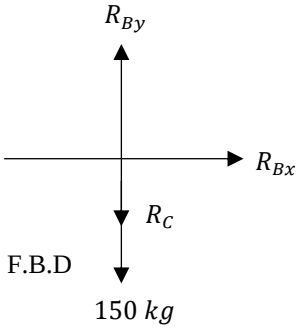
$\therefore R_C = 433.012\ kg$ **(Ans.)**

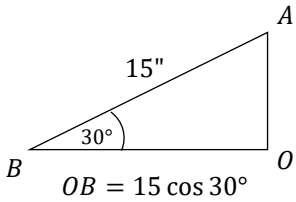
(ii) B বিন্দুর প্রতিক্রিয়া বল ঃ

যেহেতু, $R_{Bx} = 0$

$\therefore R_B = R_{By}$

$\overset{\uparrow}{+} \Sigma F_y = 0$





বা, $R_{By} - R_c - 150 = 0$

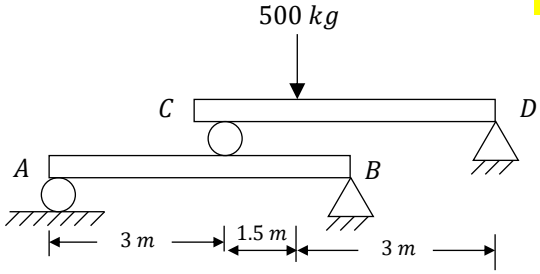
বা, $R_B = 150 + R_C$

বা, $R_B = 150 + 433.012 \;\; [R_c = 433.012]$

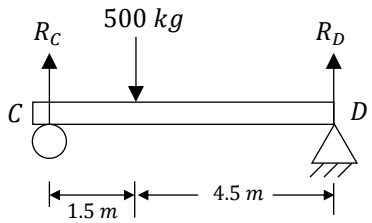
$\therefore R_B = 583.012\, kg$ **(Ans.)**

***** ৩। চিত্রানুযায়ী A, B, C ও D বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় কর।**

বাকাশিবো- ২০১৩, ১৩'পরি



সমাধান ঃ C বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই-



উপরের অংশের F.B.D

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0$

বা, $(500 \times 1.5) - (R_D \times 6) = 0$

বা, $750 - 6R_D = 0$

বা, $6R_D = 750$

বা, $R_D = \frac{750}{6}$

$\therefore R_D = 150\, kg$ **(Ans.)**

আবার, $\overset{\uparrow}{+} \Sigma F_y = 0$

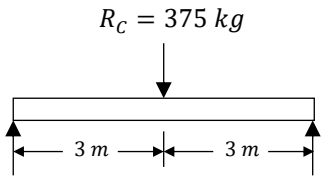
বা, $R_C + R_D - 500 = 0$

বা, $R_C = 500 - R_D$

বা, $R_C = 500 - 125$ $[R_D = 150]$

$\therefore R_C = 375\ kg$ **(Ans.)**

যেহেতু A ও B এর সাপোর্ট C বিন্দুর প্রতিক্রিয়া বল সমান দূরত্বে থেকে বহন করেছে,



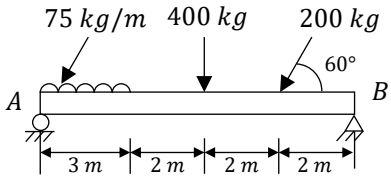
নিচের অংশের F.B.D

সুতরাং $R_A = R_B = \frac{375}{2}$

$\therefore R_A = \frac{375}{2} = 187.5\ kg$ **(Ans.)**

এবং $R_B = \frac{375}{2} = 187.5\ kg$ **(Ans.)**

**** ৪। চিত্রের বিমটি দুটি সাপোর্টের উপর বসানো আছে। সাপোর্ট দুটির প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় কর।** **বাকাশিবো- ২০১৩'পরি, ১৮**



সমাধান ঃ গাণিতিক সমাধান ১৬ নং এর অনুরূপ।

Ans: $R_A = 403.768\ kg$

$R_B = 394.437\ kg$

অধ্যায়-৪ বলের সাম্যাবস্থা

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। বলের সাম্যাবস্থা বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৫, ০৬, ১৩'পরি, ১৫'পরি, ১৬'পরি, ১৭'পরি, ১৮, ১৮'পরি, ১৯, ২৩

উত্তর ঃ কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়ারত বলগুলোর লব্ধি শূন্য হলে, বল ব্যবস্থার এরূপ অবস্থাকে বলের সাম্যাবস্থা বলা হয়। বলের সাম্যাবস্থায় বস্তু বা কণা স্থির থাকে অথবা সুষম গতিতে থাকে।

***** ২। ল্যামির সূত্রটি বিবৃত কর।**

EGCB: 2018, বাকাশিবো- ২০০৫, ০৯, ১৩, ১৫, ১৭'পরি, ২০'পরি, ২১, ২১'পরি

উত্তর ঃ কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল যদি পরস্পরের সাথে সাম্যাবস্থায় থাকে, তাহলে প্রতিটি বলের মান অপর দুটি বলের মধ্যবর্তী কোণের সাইনের (sine) সমানুপাতিক।

***** ৩। বলের সাম্যাবস্থার শর্তগুলো কী কী?**

বাকাশিবো- ২০১১'পরি, ১৩'পরি, ১৫, ১৫'পরি. ১৭, ১৮'পরি, ২০

উত্তর ঃ বলের সাম্যাবস্থার শর্তগুলো নিম্নরূপ ঃ

i) বস্তুটির উপর ক্রিয়ারত বলগুলোর X-অক্ষ বরাবর উপাংশের অর্থাৎ অনুভূমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য। অর্থাৎ, $\sum F_x = 0$.

ii) বস্তুটির উপর ক্রিয়ারত বলগুলোর Y-অক্ষ বরাবর উপাংশের অর্থাৎ উল্লম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য। অর্থাৎ, $\sum F_y = 0$.

iii) কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু বা অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির উপর ক্রিয়ারত সকল বলগুলোর মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য। অর্থাৎ, $\sum M = 0$.

**** ৪। সাম্যাবস্থার তিন বলের বা ত্রি-বলের নীতিটি লেখ।**

বাকাশিবো- ২০১৪, ২১'পরি

উত্তর ঃ তিন-বল বা ত্রি-বল নীতি ঃ তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকবে, যদি যেকোনো দুটি বলের লব্ধি-

i) তৃতীয় বলের সমান হয়
ii) তৃতীয় বলের বিপরীত মুখী হয় এবং
iii) তৃতীয় বলের সাথে একই লাইনে কাজ করে।

SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। বলের সাম্যাবস্থার শর্তগুলো কী কী?**

বাকাশিবো- ২০০৪, ১০, ১২'পরি, ১৩'পরি, ১৭, ১৯, ২০'পরি, ২৩

অথবা, সমতলীয় বলের ভারসাম্যের শর্তগুলো লেখ। বাকাশিবো- ২০০৯

অথবা, একটি বল কখন সাম্যাবস্থায় বিরাজ করবে? বাকাশিবো- ২০১৮

উত্তর ঃ কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বলসমূহ বস্তুটিকে সাম্যাবস্থায় রাখব না'কি রাখবে না, সেটা কতকগুলো শর্তের উপর নির্ভর করে। বলের সাম্যাবস্থার তিনটি শর্ত রয়েছে। যথা ঃ

i) বস্তুটির উপর ক্রিয়ারত বলগুলোর X-অক্ষ বরাবর উপাংশের অর্থাৎ অনুভূমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য। অর্থাৎ, $\sum F_x = 0$.

ii) বস্তুটির উপর ক্রিয়ারত বলগুলোর Y-অক্ষ বরাবর উপাংশের অর্থাৎ উল্লম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য। অর্থাৎ, $\sum F_y = 0$.

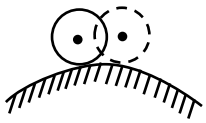
iii) কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু বা অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির উপর ক্রিয়ারত সকল বলগুলোর মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য। অর্থাৎ, $\sum M = 0$.

*** ২। বিভিন্ন প্রকার সাম্যাবস্থার বর্ণনা দাও।** বাকাশিবো- ২০২১

উত্তর ঃ সাধারণত তিন ধরনের সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হয়। নিম্নে তাদের সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দেওয়া হলো ঃ

i) স্থায়ী সাম্যাবস্থা (Stable Equilibrium) ঃ কোনো বস্তুর স্থির অবস্থান হতে সামান্য বিচ্যুতির পর পূর্ব অবস্থানে ফিরে আসলে তাকে স্থায়ী সাম্যাবস্থা বলে।

ii) **অস্থায়ী সাম্যাবস্থা (Unstable Equilibrium) ঃ** কোনো বস্তুর স্থির অবস্থান হতে সামান্য বিচ্যুতির পর যদি পূর্বের অবস্থানে ফিরে না এসে চলতে থাকে, তবে তাকে অস্থায়ী সাম্যাবস্থা বলে।

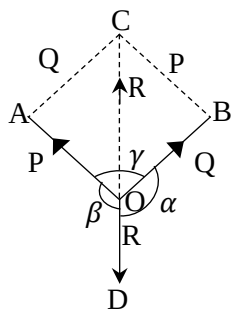


iii) **নিরপেক্ষ সাম্যাবস্থা (Neutral Equilibrium) ঃ** কোনো বস্তু স্থির অবস্থান হতে বিচ্যুতির পর নতুন অবস্থানে স্থির থাকলে, তাকে নিরপেক্ষ সাম্যাবস্থা বলে।

SOS রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। ল্যামির সূত্রটি প্রমাণ কর।** বাকাশিবো- ২০০৮, ০৯, ০৯'পরি, ১৩'পরি, ১৪, ১৫, ১৫'পরি, ১৬'পরি, ১৭, ১৮, ১৯, ১৯'পরি, ২০'পরি, ২১, ২৩

উত্তর ঃ ল্যামির সূত্র ঃ কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল ভারসাম্য সৃষ্টি করলে এদের প্রত্যেকটির মান অপর দুটি বলের অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হবে



অর্থাৎ, $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, P, Q, R সমতলীয় বল তিনটি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় রয়েছে। এদের বিপরীত কোণগুলো যথাক্রমে α, β ও γ.

প্রথমে P এবং Q বল দুটি কল্পনা করি, এবং ধরি, OA = P এবং OB = Q. এখন OA এবং OB কে সন্নিহিত বাহু ধরে OACB সামান্তরিক অঙ্কন করি। যেহেতু বলগুলো ভারসাম্য অবস্থায় আছে, অতএব P এবং Q বলের লব্ধি OD রেখা বরাবর R এর সমান কিন্তু এর বিপরীত দিক অর্থাৎ OD রেখা বরাবর উপরের দিকে হবে।

চিত্রে P এবং Q বল দুটির লব্ধির মান ও দিক সামান্তরিক OACB এর কর্ণ OC দ্বারা সূচিত করা হয়েছে।

চিত্র হতে, OA = BC = P এবং OB = AC = Q।

$\therefore \angle AOC = 180° - \beta$

এবং $\angle ACO = \angle BOC = 180° - \alpha$

$\therefore \angle CAO = 180° - (\angle AOC + \angle ACO)$

মাঝের অক্ষর দ্বারা কোণ নির্দেশ করে

[**N.B** ঃ $\angle CAO$ দ্বারা, ΔOAC এর $\angle A$ কে নির্দেশ করে]

$= 180° - (180° - \beta + 180° - \alpha)$

$= 180° - (360° - \alpha - \beta)$

$= 180° - 360° + \alpha + \beta)$

$= \alpha + \beta - 180°$

আবার, আমরা জানি,

$\alpha + \beta + \gamma = 360°$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma - 180° = 360° - 180°$

[উভয়পক্ষে $180°$ বিয়োগ করে]

$\Rightarrow \alpha + \beta - 180° = 180° - \gamma$

$\therefore \angle CAO = 180° - \gamma$

ত্রিকোণমিতির সূত্রানুযায়ী OAC ত্রিভুজে,

$$\frac{OA}{\sin\angle ACO} = \frac{AC}{\sin\angle AOC} = \frac{OC}{\sin\angle CAO}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{AC}{\sin(180°-\beta)} = \frac{OC}{\sin(180°-\gamma)}$$

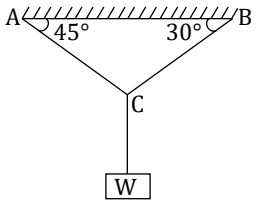
$$[\sin(180° - \theta) = \sin\theta]$$

$$\therefore \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$$ **(প্রমাণিত)**

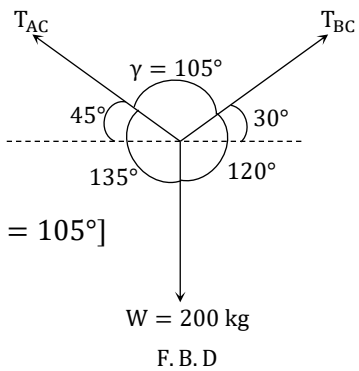
SOS গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

***** ১। চিত্র অনুযায়ী W = 200 kg ওজনের একটি বাক্স AC এবং BC তার দিয়ে ঝুলানো আছে। তার দুটোর টানের পরিমাণ নির্ণয় কর।**

বাকাশিবো- ২০০৬, ০৯, ১৪, ১৫, ১৫'পরি, ১৬, ১৭, ২১, ২১'পরি



সমাধান ঃ ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করে পাই,



$$\frac{T_{AC}}{\sin 120°} = \frac{T_{BC}}{\sin 135°} = \frac{200}{\sin 105°}$$

$$\therefore \frac{T_{AC}}{\sin 120°} = \frac{200}{\sin 105°}$$

[এখানে, $\gamma = 360° - 135° - 120° = 105°$]

$$\Rightarrow T_{AC} = \frac{200}{\sin 105°} \times \sin 120°$$

$$\therefore T_{AC} = 179.315 \text{ kg } \textbf{(Ans.)}$$

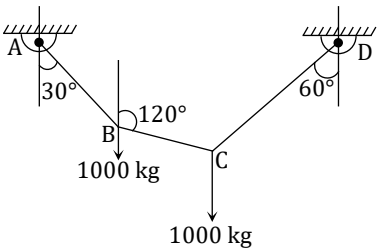
আবার, $\frac{T_{BC}}{\sin 135°} = \frac{200}{\sin 105°}$

$$\Rightarrow T_{BC} = \frac{200}{\sin 105°} \times \sin 135°$$

$$\therefore T_{BC} = 146.41 \text{ kg } \textbf{(Ans.)}$$

***** ২। চিত্রানুযায়ী একটি তার দ্বারা B ও C বিন্দুতে দুটি ওজন ঝুলানো আছে। AB, BC এবং CD অংশের টান নির্ণয় কর।**

DUET: 2006-07, বাকাশিবো- ২০১০, ১১, ২০'পরি



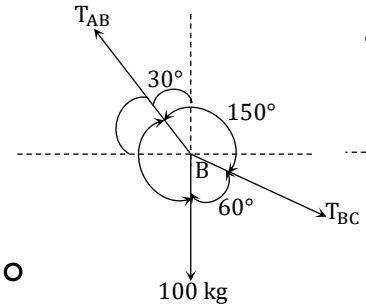
সমাধান ঃ B বিন্দুতে ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60°} = \frac{T_{BC}}{\sin 150°} = \frac{1000}{\sin 150°}$$

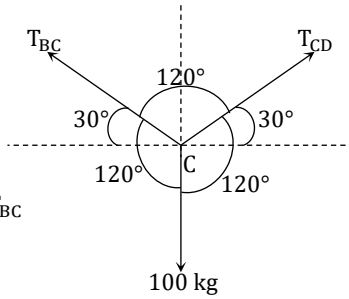
$$\therefore \frac{T_{AB}}{\sin 60°} = \frac{1000}{\sin 150°}$$

$$\Rightarrow T_{AB} = \frac{1000}{\sin 150°} \times \sin 60°$$

$$\therefore T_{AB} = 1732.05 \text{ kg } \textbf{(Ans.)}$$



Joint B তে F. B. D



Joint C তে F. B. D

আবার, $\frac{T_{BC}}{\sin 150°} = \frac{1000}{\sin 150°}$

$$\Rightarrow T_{BC} = \frac{1000}{\sin 150°} \times \sin 150°$$

$$\therefore T_{BC} = 1000 \text{ kg } \textbf{(Ans.)}$$

এখন, C বিন্দুতে ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

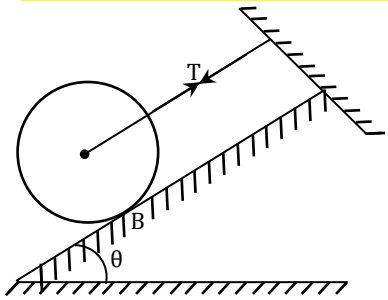
$$\frac{T_{BC}}{\sin 120°} = \frac{T_{CD}}{\sin 120°} = \frac{1000}{\sin 120°}$$

$$\therefore \frac{T_{CD}}{\sin 120°} = \frac{1000}{\sin 120°}$$

$$\Rightarrow T_{CD} = \frac{1000}{\sin 120°} \times \sin 120°$$

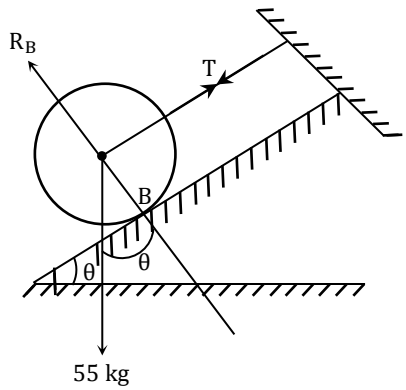
$$\therefore T_{CD} = 1000 \text{ kg } \textbf{(Ans.)}$$

**** ৩। চিত্রানুযায়ী 55 kg ওজনের গোলক হেলানো তলের উপর রশির সাহায্যে বাঁধা আছে। রশির টানা বলের মান 22.6 kg হলে θ এর মান এবং B বিন্দুর প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০০৬, ০৬'পরি, ০৭, ১০, ১৪



সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $T = 22.6$ kg

ফ্রি-বডি ডায়াগ্রাম হতে ল্যামির সূত্রানুযায়ী,



$$\frac{R_B}{\sin(90°+\theta)} = \frac{T}{\sin\alpha} = \frac{55}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{R_B}{\sin(90°+\theta)} = \frac{22.6}{\sin(180°-\theta)} = \frac{55}{\sin 90°}$$

$$\Rightarrow \frac{R_B}{\cos\theta} = \frac{22.6}{\sin\theta} = 55$$

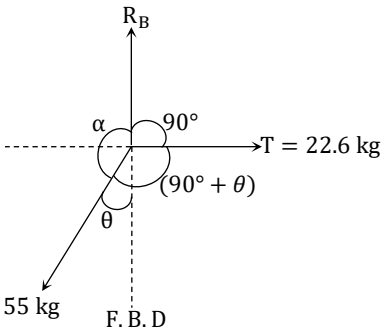
ত্রিকোণমিতিক নিয়মানুসারে,
$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$
$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$
$\sin 90° = 1$

$$\therefore \frac{22.6}{\sin\theta} = 55$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{22.6}{55} = 0.4109$$

$$\Rightarrow \theta = \sin^{-1} 0.4109$$

$$\therefore \theta = 24.26° \textbf{ (Ans.)}$$



আবার, $\frac{R_B}{\cos\theta} = 55$

$[\alpha = 360° - 90° - (90° + \theta) = 180 - \theta]$

$$\Rightarrow R_B = 55\cos 24.26°$$

$$\therefore R_B = 50.143 \text{ kg } \textbf{(Ans.)}$$

অধ্যায়-৫ ভরকেন্দ্র

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। ভারকেন্দ্র (Center of Gravity) বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৪, ০৭, ০৯, ১০, ১১, ১২, ১৫, ১৬'পরি

উত্তর ঃ কোনো বস্তুকে যে বিন্দু দিয়ে পৃথিবী তার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে অর্থাৎ বস্তুর ওজন যে বিন্দু দিয়ে কাজ করে তাকে ঐ বস্তুর ভারকেন্দ্র (Center of Gravity) বলে। একে সংক্ষেপে c.g দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

**** ২। কেন্দ্র (Centroid) বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০১৫, ২৩

উত্তর ঃ সেন্ট্রোয়েড হলো এমন একটি বিন্দু, যাকে এক বা দ্বি-মাত্রিক চিত্রের কেন্দ্র হিসাবে বিবেচনা করা যেতে পারে।

যেমন ঃ কোনো ত্রিভুজের তিনটি মধ্যক যে বিন্দুতে ছেদ করে, তাকে ত্রিভুজের সেন্ট্রোয়েড বলে।

অনুরূপভাবে চতুর্ভুজ, বৃত্ত ইত্যাদি জ্যামিতিক ক্ষেত্রের মতো যাদের কেবলমাত্র রৈখিক অবস্থান বা ক্ষেত্রফল আছে কিন্তু এদের কোনো ভর নেই, এই সমস্ত ক্ষেত্রফলের মধ্যবিন্দুকে কেন্দ্র বলে।

***** ৩। কী কী উপায়ে ভারকেন্দ্র নির্ণয় করা হয়?**

বাকাশিবো- ২০১৩, ১৩'পরি, ১৭, ১৮, ২০, ২২

উত্তর ঃ কোনো বস্তুর বা চিত্রের ভারকেন্দ্র বা কেন্দ্র চারটি পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়। যথা ঃ

১) জ্যামিতিক পদ্ধতি ২) লেখচিত্র পদ্ধতি
৩) মোমেন্ট পদ্ধতি এবং ৪) ইন্টিগ্রেশন পদ্ধতি।

***** ৪। রেফারেন্স অক্ষ (Axis of Reference) বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৬, ০৭, ১৪, ১৫, ১৫, ২০, ২১

উত্তর ঃ কোনো বস্তুর বা চিত্রের ভারকেন্দ্র বা সেন্ট্রোয়েড সর্বদা একটি কল্পিত অক্ষের সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয়, ঐ কল্পিত অক্ষকে রেফারেন্স অক্ষ বলে।

***** ৫। প্রতিসম অক্ষ (Axis of Symmetry) বা সাদৃশ্য অক্ষ বলতে কী বুঝায়?**

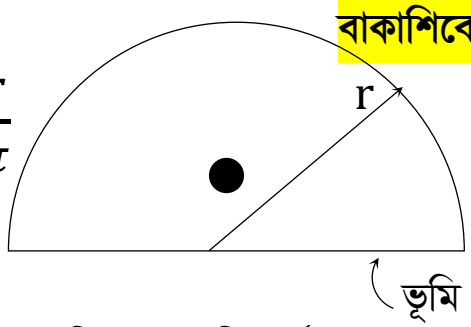
বাকাশিবো- ২০০৬, ০৭, ০৯'পরি, ১১'পরি, ১২'পরি, ১৩'পরি, ১৪, ১৬, ১৮, ২০, ২১'পরি

উত্তর ঃ কোনো বস্তু বা চিত্রের উপর অঙ্কিত যে কোনো অক্ষের উভয় পাশে যদি বস্তুটির সমান ওজন অথবা সমান ক্ষেত্র বিরাজ করে, তবে ঐ অক্ষকে ঐ বস্তুর প্রতিসম অক্ষ বলে। অর্থাৎ যে অক্ষ বরাবর কোনো বস্তুকে খুব সহজেই সমান দু'ভাগে ভাগ করা যায়, তাকে সেই বস্তুর প্রতিসম অক্ষ বলে।

*** ৬। 'r' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি অর্ধগোলকের ভূমি হতে c.g-এর দূরত্ব কত?**

বাকাশিবো- ২০২১

উত্তর ঃ ভূমি হতে c.g এর দূরত্ব হলো $\frac{4r}{3\pi}$



চিত্র ঃ একটি অর্ধ গোলক

[N.B ঃ এই রকম প্রশ্নের উত্তরে চিত্রসহ উত্তর করা উত্তম]

SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। ভারকেন্দ্র (Center of Gravity) ও কেন্দ্র (Centroid) এর মাঝে চারটি পার্থক্য লেখ।**

বাকাশিবো- ২০০৯, ১৩, ১৪, ১৫, ১৫'পরি, ১৬, ১৭, ১৮'পরি, ১৯'পরি, ২০

উত্তর ঃ ভারকেন্দ্র ও কেন্দ্রের মাঝে পার্থক্য নিম্নে দেওয়া হলো ঃ

ভারকেন্দ্র (Center of Gravity)	কেন্দ্র (Centroid)
১) এটি সেই বিন্দু যেখানে বস্তুর ওজন কেন্দ্রীভূত থাকে।	১) এটিকে একটি বডির জ্যামিতিক কেন্দ্র হিসাবে উল্লেখ করা হয়।
২) এটি সেই বিন্দু যেটা দিয়ে অভিকর্ষক বল (ওজন) বস্তুর উপর কাজ করে।	২) এটিকে একটি সুষম ঘনত্বের বস্তুর ভারকেন্দ্র হিসাবে উল্লেখ করা হয়।
৩) এটি বস্তুর একটি ভৌত আচরণ।	৩) এটি বস্তুর একটি জ্যামিতিক আচরণ।

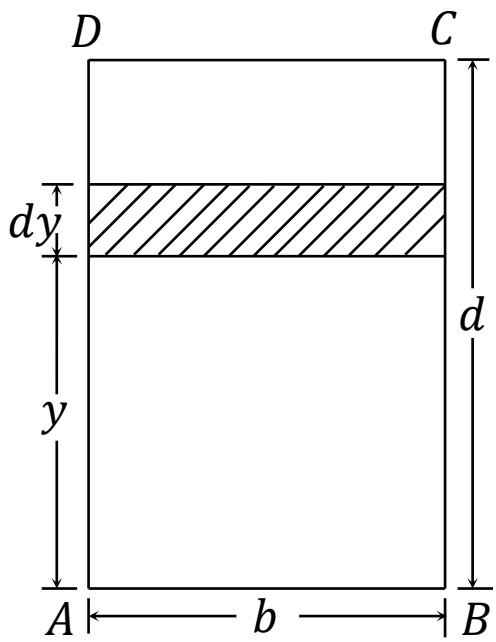
৪) একে সাধারণত c.g দ্বারা প্রকাশ করা হয়।	৪) একে সাধারণত c দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

***** ২। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।**

বাকাশিবো- ২০১৫, ১৭, ১৯, ১৯'পরি

অথবা, প্রমাণ কর যে, একটি আয়তক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র, $y = \frac{d}{2}$, যেখানে $y = x$ অক্ষ থেকে y-অক্ষের দিকে ভারকেন্দ্র এবং $d =$ আয়তক্ষেত্রের গভীরতা।

উত্তর ঃ মনে করি, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র, যা চিত্রে দেখানো হয়েছে।



চিত্রানুযায়ী,

ক্ষেত্রটির ভূমি $= AB = b$

উচ্চতা বা গভীরতা $= BC = d$

এখন ভূমি হতে y দূরত্বে dy পুরুত্বের একটি ক্ষুদ্র ফালি (Strip) বিবেচনা করি।

ক্ষুদ্র ফালি বা অংশের ক্ষেত্রফল,

$$dA = b \times dy$$

এবং সম্পূর্ণ আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = bd$

$\therefore$ ক্ষুদ্র ফালিটির ভারকেন্দ্র হবে $\frac{y.dA}{dA}$

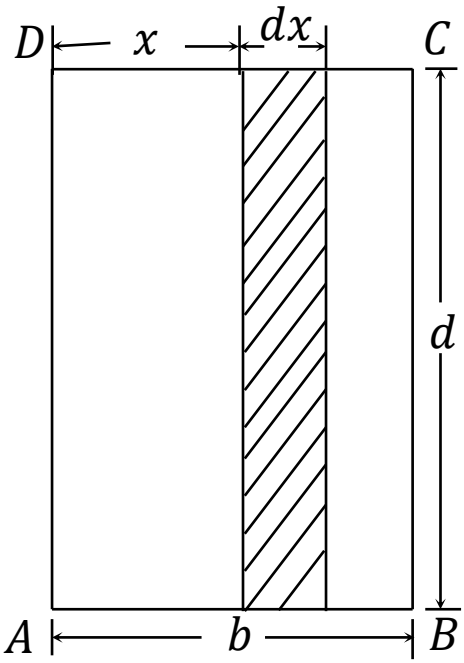
AB রেফারেন্স অক্ষ হতে আয়তক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র $\bar{Y}$ হলে-

$$\overline{Y} = \int_0^d \frac{y \cdot b dy}{dA} = \frac{\int_0^d y \cdot b dy}{\int_0^d dA} = \frac{b\int_0^d y \cdot dy}{A}$$

$$= \frac{b\int_0^d y \cdot dy}{bd} = \frac{1}{d}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^d \qquad [\int x dx = \frac{x^2}{2}]$$

$$= \frac{1}{d}\left[\frac{d^2}{2} - \frac{0}{2}\right] = \frac{1}{d} \times \frac{d^2}{2} = \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \times \text{উচ্চতা}$$

অনুরূপভাবে, মনে করি AD রেফারেন্স অক্ষ হতে ডান দিকে $\overline{X}$ দূরে আয়তক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র অবস্থিত। সুতরাং AD রেখা থেকে x দূরত্বে dx পুরুত্বের ক্ষুদ্র ফালি বিবেচনা করি। ক্ষুদ্র ফালিটির ক্ষেত্রফল, $dA = d \times dx$ এবং মোট ক্ষেত্রফল, $A = bd$



$\therefore$ সম্পূর্ণ ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র,

$$\overline{X} = \int_0^b \frac{x dA}{dA} = \frac{\int_0^b x.d\, dx}{\int_0^b dA}$$

$$= \frac{d\int_0^b x \cdot dx}{A}$$

$$= \frac{d\int_0^b x \cdot dx}{bd} = \frac{1}{b}\int_0^b x \cdot dx = \frac{1}{b}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{b}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{0}{2}\right] = \frac{1}{b} \times \frac{b^2}{2}$$

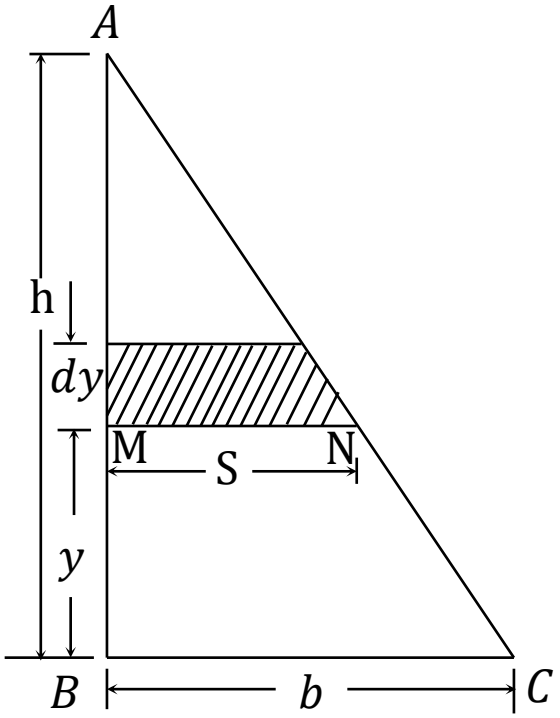
$$\therefore \overline{X} = \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি}$$

SOS রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

*** ১। ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করে দেখাও।**

DUET: 2011-12, বাকাশিবো- ২০২২

উত্তর ঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ, যা চিত্রে দেখানো হয়েছে। চিত্রানুযায়ী ভূমি $BC = b$ এবং উচ্চতা $AB = h$. ভূমি BC হতে y দূরত্বে dy পুরুত্বের একটি ক্ষুদ্র ফালি (Strip) MN বিবেচনা করি।



ধরি, $MN = S$ এবং MN অংশের ক্ষেত্রফল, $dA = S \times dy$.

আমরা জানি, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$A = \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2}bh$

এখন, ΔABC এবং ΔAMN দুটি সদৃশ ত্রিভুজ হতে আমরা পাই,

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad [AM = h - y]$$

$$\Rightarrow s = \frac{b(h-y)}{h}$$

BC বাহু হতে ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\overline{Y}$ হলে,

$$\overline{Y} = \frac{\int y dA}{A}$$

$$\overline{Y} = \frac{\int_0^h y\, S\, dy}{A} = \frac{\int_0^h y \frac{b(h-y)}{h} dy}{\frac{bh}{2}} \qquad \begin{bmatrix} dA = S\, dy \\ A = \frac{bh}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\int_0^h \frac{hb(h-y)}{h}(y\, dy)}{\frac{bh}{2}} = \frac{\frac{b}{h}\int_0^h (h-y)(y\, dy)}{\frac{bh}{2}}$$

$$= \frac{2}{h^2}\int_0^h (hy - y^2) dy$$

$$= \frac{2}{h^2}\left[\int_0^h (hy)\, dy - \int_0^h y^2\, dy\right]$$

$$= \frac{2}{h^2}\left[\left[\frac{h\, y^2}{2}\right]_0^h - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h\right]$$

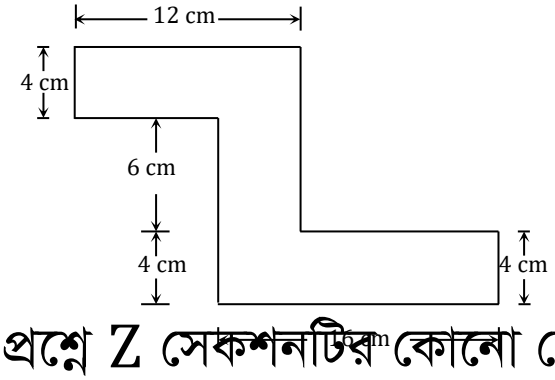
$$= \frac{2}{h^2}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{2}{h^2} \times \frac{h^3}{6} = \frac{h}{3}$$

অনুরূপভাবে, AB রেখা হতে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের দূরত্ব পাওয়া যাবে

$$\overline{X} = \frac{b}{3}$$

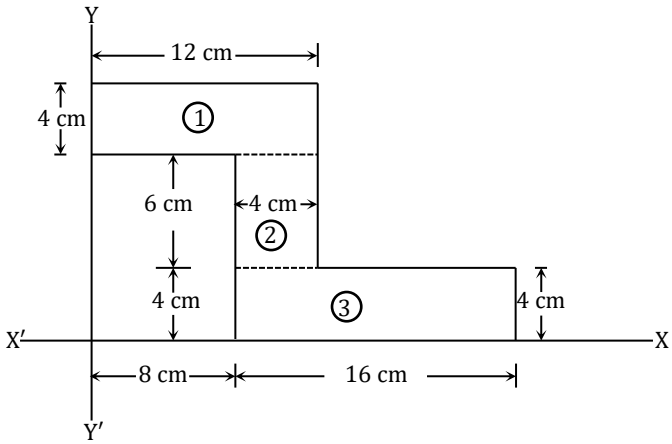
SOS গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

***** ১। নিম্নে একটি Z সেকশনের চিত্র প্রদর্শিত হলো। এটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ১৯৯৭, ০৭, ১৮, ২০



সমাধান ঃ যেহেতু প্রশ্নে Z সেকশনটির কোনো রেফারেন্স অক্ষ দিয়ে দেওয়া নেই,

তাই প্রথমেই X - X′ ও Y - Y′ রেফারেন্স অক্ষের অবস্থান চিহ্নিত করি।



এখন সেকশনটিকে তিনটি অংশে বিভিক্ত করি।

মনে করি, $\overline{X}$ = Y-Y′ রেফারেন্স অক্ষ হতে সেকশনটির ভারকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্ব।

এবং $\overline{Y}$ = X-X′ রেফারেন্স অক্ষ হতে সেকশনটির ভারকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্ব।

$$a_1 = 12 \times 4 = 48 \text{ cm}^2$$

$$a_2 = 4 \times 6 = 24 \text{ cm}^2$$

$$a_3 = 16 \times 4 = 64 \text{ cm}^2$$

$$x_1 = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

$x_2 = 8 + \frac{4}{2} = 8 + 2 = 10$ cm

$x_3 = 8 + \frac{16}{2} = 8 + 8 = 16$ cm

$y_1 = 10 + \frac{4}{2} = 10 + 2 = 12$ cm

$y_2 = 4 + \frac{6}{2} = 4 + 3 = 7$ cm

$y_3 = \frac{4}{2} = 2$ cm

আমরা জানি, $\overline{X} = \frac{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3}{a_1+a_2+a_3}$

$= \frac{(48\times6)+(24\times10)+(64\times16)}{48+24+64}$

$= \frac{1552}{136}$

$= 11.412$ cm

আবার, $\overline{Y} = \frac{a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3}{a_1+a_2+a_3}$

$= \frac{(48\times12)+(24\times7)+(64\times2)}{48+24+64}$

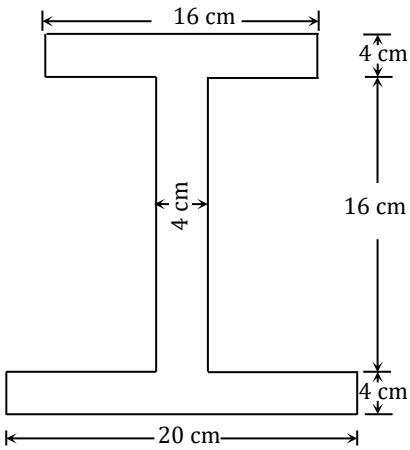
$= \frac{872}{136}$

$= 6.412$ cm

$\therefore$ Z সেকশনটির ভারকেন্দ্রের অবস্থান, $(\overline{X}, \overline{Y}) = (11.412$ cm, 6.412 cm) **(Ans.)**

*** ২। চিত্রে প্রদর্শিত সেকশনটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

বাকাশিবো- ২০১০, ১৪, ১৫, ১৫'পরি



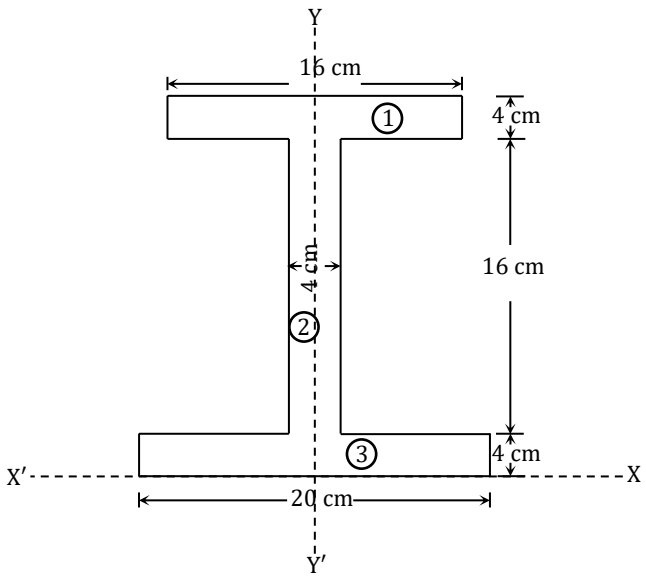
সমাধান ঃ মনে করি, I সেকশনটির রেফারেন্স অক্ষদ্বয় যথাক্রমে X-X′ ও Y-Y′.

যেহেতু সেকশনটি Y-Y′ অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসাম্য $(i \cdot e \cdot \overline{X} = 0)$.

সুতরাং, শুধুমাত্র $\overline{Y}$ বের করতে হবে।

মনে করি, $\overline{Y}$ = X-X′ রেফারেন্স অক্ষ হতে সেকশনটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব।

এখন সেকশনটিকে তিনটি অংশে বিভক্ত করি।



$$a_1 = 16 \times 4 = 64 \text{ cm}^2$$
$$a_2 = 4 \times 16 = 64 \text{ cm}^2$$
$$a_3 = 20 \times 4 = 80 \text{ cm}^2$$
$$y_1 = 4 + 16 + \frac{4}{2}$$
$$= 20 + 2 = 22 \text{ cm}$$

$y_2 = 4 + \frac{16}{2} = 4 + 8$

$= 12$ cm

$y_3 = \frac{4}{2} = 2$ cm

আমরা জানি, $\overline{Y} = \frac{a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3}{(a_1+a_2+a_3)}$

$= \frac{(64\times22)+(64\times12)+(80\times2)}{64+64+80}$

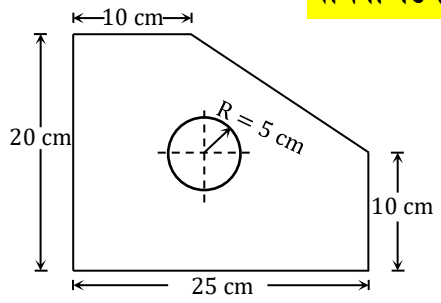
$= \frac{2336}{208}$

$= 11.23$ cm

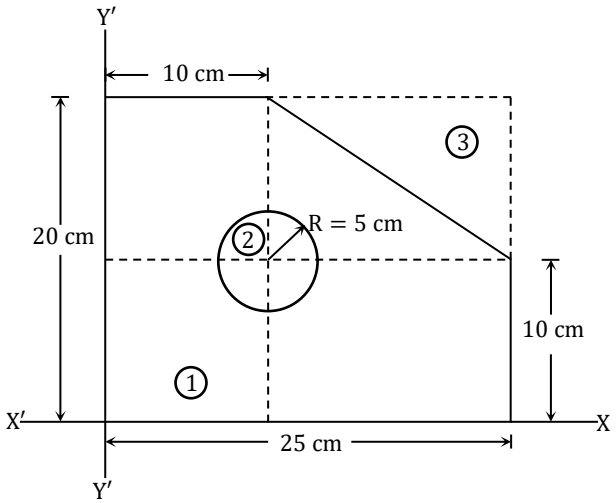
∴ I সেকশনটির ভারকেন্দ্র X-$\overline{X}$ রেফারেন্স অক্ষ হতে 11.23 cm উপরে অবস্থিত। **(Ans.)**

***** ৩। চিত্রের X ও Y অক্ষের সাপেক্ষে ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।**

বাকাশিবো- ২০১২'পরি, ১৫, ১৮, ১৮'পরি



সমাধান ঃ সেকশনটির x ও y রেফারেন্স অক্ষদ্বয়ের অবস্থান চিত্রে দেখানো হয়েছে।



মনে করি, $\overline{X} = Y - Y'$ বা y' রেফারেন্স অক্ষ হতে সেকশনটির ভারকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্ব।

এবং $\overline{Y} = X - X'$ বা x' রেফারেন্স অক্ষ হতে সেকশনটির ভারকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্ব।

এখন সেকশনটিকে তিনটি অংশে বিভক্ত করি।

$$a_1 = 25 \times 20 = 500 \text{ cm}^2$$

$$a_2 = \pi \times 5^2 = 78.54 \text{ cm}^2$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \times 10 \times 15 = 5 \times 15 = 75 \text{ cm}^2$$

$$x_1 = \frac{25}{2} = 12.5 \text{ cm}$$

$$x_2 = 10 \text{ cm}$$

$x_3 = 10 + \frac{2}{3} \times 15 = 10 + (2 \times 5)$

$= 10 + 10$

$= 20$ cm

$y_1 = \frac{20}{2} = 10$ cm

$y_2 = 10$ cm

$y_3 = 10 + \frac{2}{3} \times 10 = 10 + \frac{20}{3} = 10 + 6.667$

$= 16.667$ cm

আমরা জানি, $\overline{X} = \frac{a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3}{a_1 - a_2 - a_3}$

$= \frac{(500 \times 12.5) - (78.54 \times 10) - (75 \times 20)}{500 - 78.54 - 75}$

$= 11.44$ cm

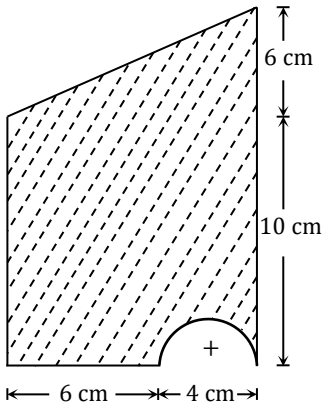
আবার, $\overline{Y} = \frac{a_1y_1 - a_2y_2 - a_3y_3}{a_1 - a_2 - a_3}$

$= \frac{(500 \times 10) - (78.54 \times 10) - (75 \times 16.667)}{500 - 78.54 - 75}$

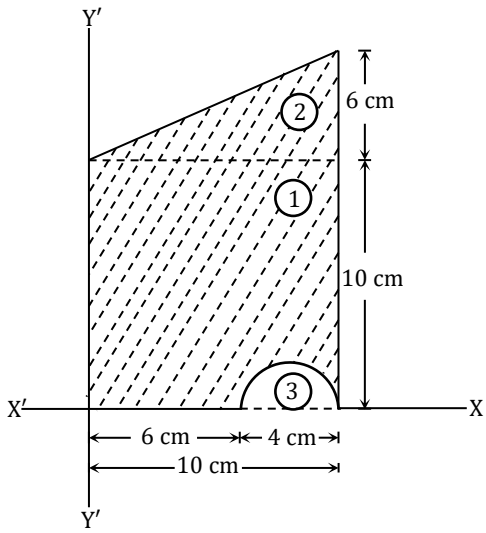
$= 8.556$ cm

∴ চিত্রের সেকশনটির X ও Y সাপেক্ষে ভারকেন্দ্রের অবস্থান যথাক্রমে 8.556 cm এবং 11.44 cm **(Ans.)**

৪। চিত্রের ক্ষেত্রটির সেন্ট্রয়েড নির্ণয় কর। **বাকাশিবো-২০১৯, ২১'পরি**



সমাধান ঃ ক্ষেত্রটির $x - x'$ ও $y - y'$ রেফারেন্স অক্ষদ্বয়ের অবস্থান চিত্রে দেখানো হয়েছে।



মনে করি, $\overline{X} = Y\text{-}Y'$ রেফারেন্স অক্ষ হতে ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্ব।

এবং $\overline{Y} = X - X'$ রেফারেন্স অক্ষ হতে ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্ব।

এখন ক্ষেত্রটিকে তিনটি অংশে বিভক্ত করি।

$$a_1 = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 5 \times 6$$

$$= 30 \text{ cm}^2$$

$$a_3 = \frac{\pi \times 2^2}{2} = 6.283 \text{ cm}^2$$

$$x_1 = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$x_2 = \frac{2}{3} \times 10 = 6.667 \text{ cm}$$

$x_3 = 6 + \frac{4}{2} = 8$ cm

$y_1 = \frac{10}{2} = 5$ cm

$y_2 = 10 + \frac{1}{3} \times 6 = 10 + 2 = 12$ cm

$y_3 = \frac{4 \times r}{3\pi} = \frac{4 \times 2}{3\pi} = 0.8488$ cm

আমরা জানি, $\overline{X} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3}{a_1 + a_2 - a_3}$

$= \frac{(100 \times 5) + (30 \times 6.667) - (6.283 \times 8)}{100 + 30 - 6.283}$

$= 5.25$ cm **(Ans.)**

আবার, $\overline{Y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 - a_3y_3}{a_1 + a_2 - a_3}$

$= \frac{(100 \times 5) + (30 \times 12) - (6.283 \times 0.8488)}{100 + 30 - 6.283}$

$= 6.908$ cm **(Ans.)**

অধ্যায়-৬ মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বা জড়তার ভ্রামক

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বা জড়তার ভ্রামক বলতে কী বুঝায়? অথবা, বলের ভ্রামক বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৮, ১১, ১২, ১৫, ১৫'পরি, ১৬, ১৮, ১৯, ২০, ২০'পরি, ২১'পরি

উত্তর ঃ একটি ক্ষেত্রের মোট ক্ষেত্রফলকে কোনো নির্দিষ্ট অক্ষ হতে ঐ ক্ষেত্রফলের ভারকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্বের বর্গ দ্বারা গুণ করলে যে ফল পাওয়া যাবে, তাকে ঐ অক্ষের সাপেক্ষে ঐ ক্ষেত্রটির মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বা জড়তার ভ্রামক বলে।

গাণিতিকভাবে, $I_{xx} = \int y^2 dA$ অথবা $I_{yy} = \int x^2 dA$.

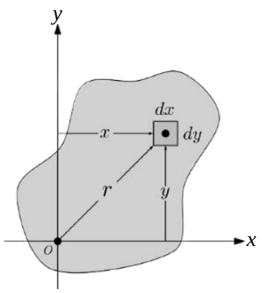
***** ২। মোমেন্ট অব ইনার্শিয়ার ব্যবহার লেখ।** বাকাশিবো- ২০০৯, ১১, ২১'পরি

উত্তর ঃ বিম, কলাম, শ্যাফট ইত্যাদি ডিজাইনের ক্ষেত্রে সামর্থ নির্ণয়ের জন্য মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া ব্যবহার করা হয়। এটি বিম, কলাম, শ্যাফট ইত্যাদি বেঁকে যাওয়ার বিরুদ্ধে বাধা প্রদানের ক্ষমতা নির্দেশ করে।

***** ৩। পোলার মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বলতে কী বুঝায়?**

অথবা, পোলার জড়তার ভ্রামক কাকে বলে? বাকাশিবো- ২০০৫, ০৭, ১৪, ১৮'পরি

উত্তর ঃ পোলার মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া হলো একটি নির্দিষ্ট অক্ষের উপর যখন কিছু টর্ক প্রয়োগ করা হয় তখন টরশনের প্রতিরোধ করতে একটি বস্তুর সক্ষমতার পরিমাপ।



অথবা, কোনো ক্ষেত্রে উল্লম্ব অক্ষ বরাবর গৃহীত মোমেন্ট অব ইনার্শিয়াকে পোলার মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বলে।

একে J দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

গাণিতিকভাবে,

$$J = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA$$
$$= \int y^2 dA + \int x^2 dA$$
$$= I_x + I_y$$

***** ৪। চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলতে কী বুঝায়?**

অথবা, রেডিয়াস অব জাইরেশন বলতে কী বুঝায়?

বাকাশিবো- ২০০৯, ১৪, ১৫, ১৫'পরি, ১৬, ১৬'পরি, ১৭, ১৯, ২০, ২০'পরি, ২১

উত্তর ঃ কোনো ক্ষেত্রকে নির্দিষ্ট অক্ষ হতে যদি এমন একটি দূরত্বে কেন্দ্রীভূত মনে করা হয়, যাতে ঐ অক্ষের সাপেক্ষে মোট ক্ষেত্রের এবং কেন্দ্রীভূত ক্ষেত্রের জড়তার ভ্রামক একই হয়, তবে ঐ নির্দিষ্ট অক্ষ থেকে যে দূরত্বে ক্ষেত্রটিকে কেন্দ্রীভূত ধরা হয়, তাকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলে। একে K দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

***** ৫। সেকশন মডুলাস বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো-২০০৪, ১৩, ১৯, ২০, ২৩

উত্তর ঃ কোনো ক্ষেত্রের বা সেকশনের ভারকেন্দ্রগামী অক্ষের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়াকে ঐ ক্ষেত্রের বা সেকশনের ভারকেন্দ্রগামী অক্ষ হতে বহিঃস্থ প্রান্তের সর্বোচ্চ দূরত্ব দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে সেকশন মডুলাস বলে। একে Z দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।**

অথবা, সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্যটি চিত্রসহ বর্ণনা কর।

অথবা, ইন্টিগ্রেশন পদ্ধতিতে সরল ক্ষেত্রফলের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর। বাকাশিবো- ২০১৭'পরি, ১৮'পরি, ১৯'পরি, ২০

উত্তর ঃ একটি অক্ষ AA' এর সাপেক্ষে একটি ক্ষেত্র A এর জড়তার ভ্রামক বা মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া I বিবেচনা করি। চিত্রানুযায়ী-

y = ক্ষেত্রটির একটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল dA থেকে AA' অক্ষের দূরত্ব।

সুতরাং আমরা লিখতে পারি-

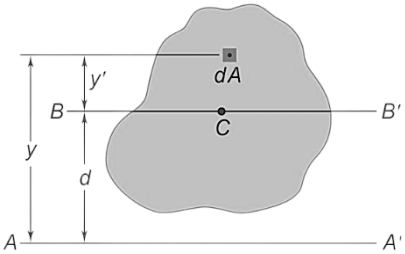
$$I = \int y^2 dA \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(\mathrm{i})$$

এখন AA' এর সমান্তরাল একটি অক্ষ BB', ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র G এর মধ্য দিয়ে আঁকি। এই অক্ষটিকে ভারকেন্দ্রগামী অক্ষ বলা হয়।

মনে করি,

y' = ভারকেন্দ্রগামী অক্ষ BB' এবং ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল dA এর মধ্যবর্তী দূরত্ব

A = ক্ষেত্রটির সমগ্র ক্ষেত্রফল



d = AA' অক্ষ এবং ভারকেন্দ্রগামী অক্ষ BB'এর মধ্যবর্তী দূরত্ব

$\bar{I}_x$ = ভারকেন্দ্রগামী অক্ষ BB' এর সাপেক্ষে ক্ষেত্রটির মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

$\therefore y = y' + d$

সুতরাং, (i) নং সমীকরণ হতে পাই-

$$I = \int (y' + d)^2 dA$$

$$= \int (y'^2 + 2y'd + d^2) dA$$

$$= \int y'^2 dA \int 2y'd\, dA + \int d^2 dA$$

$$= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA$$

$$= \bar{I}_x + 0 + d^2 A$$

$\therefore I = \bar{I}_x + Ad^2$ **(প্রমাণিত)**

N.B ঃ এখানে, $\int y' dA$ অংশটি ভারকেন্দ্রগামী অক্ষ BB' এর সাপেক্ষে ক্ষেত্রটির প্রথম মোমেন্টকে উপস্থাপন করে।যেহেতু ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র G সেই অক্ষের উপর অবস্থিত, সুতরাং $2d \int y' dA = 0$ হতে হবে।

***** ২। লম্ব অক্ষের উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।**

অথবা, প্রচলিত নোটেশন অনুযায়ী দেখাও যে, পোলার মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া, $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$. **বাকাশিবো- ২০০৬, ০৯, ১৩'পরি, ১৪, ১৭, ১৯**

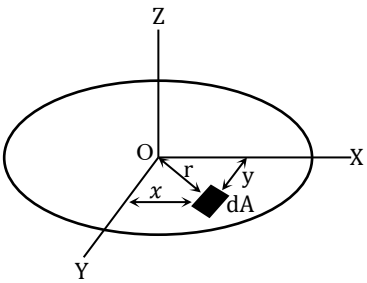
উত্তর ঃ যদি কোনো ক্ষেত্রের I_{xx} এবং I_{yy} দুটি লম্ব অক্ষ (Perpendicular Axis)-এর মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া হয়, যা অক্ষদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে মিলিত হয়েছে। তবে উক্ত ক্ষেত্রের উপর লম্বভাবে অবস্থিত কোনো অক্ষ (OZ)-এর সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া হবে I_{zz}.

Z-অক্ষ যদি X এবং Y অক্ষের মিলিত তলের উপর লম্ব হয়, তবে

$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$ বা $(I_z = I_x + I_y)$।

ধরি, চিত্রানুযায়ী A ক্ষেত্রটির ক্ষুদ্র অংশ dA, যা OX এবং OY দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ হতে X এবং Y দূরে অবস্থিত।

এখন মনে করি, OZ অক্ষটি OX এবং OY-এর উপর লম্ব। OZ অক্ষ হতে dA ক্ষেত্রটির দূরত্ব r।



তাহলে- $r^2 = x^2 + y^2$

আমরা জানি, X-অক্ষ হতে dA ক্ষুদ্র ক্ষেত্রটির মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া, $dI_x = y^2 dA$

বা, $I_x = \int y^2 dA$

এবং Y অক্ষ হতে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া, $dI_y = x^2 dA$

বা, $I_y = \int x^2 dA$

অতএব, $dI_z = r^2 dA = (x^2 + y^2)dA = x^2 dA + y^2 dA$

বা, $I_z = \int (x^2 dA + y^2 dA) = \int x^2 dA + \int y^2 dA$

$\therefore I_z = I_y + I_x$ **(প্রমাণিত)**

// দ্বিতীয় অংশের উত্তর করার সময় নিচের অংশ সংযুক্ত হবে

আমরা জানি, কোনো ক্ষেত্রের উল্লম্ব অক্ষ বরাবর মোমেন্ট অব ইনার্শিয়াকে পোলার মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বলে।

একে সাধারণত J দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore J = I_z = \int r^2 dA$$

$$= \int (x^2 + y^2) dA \qquad [\because r^2 = x^2 + y^2]$$

$$= \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y$$ **(প্রমাণিত)**

SOS রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। প্রমাণ কর যে, আয়তাকার ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া $= \frac{bd^3}{12}$ অথবা $\frac{db^3}{12}$ অথবা, $\frac{bh^3}{12}$ অথবা $\frac{hb^3}{12}$.**

বাকাশিবো- ২০১৫'পরি, ১৭'পরি, ১৮'পরি, ২০, ২২

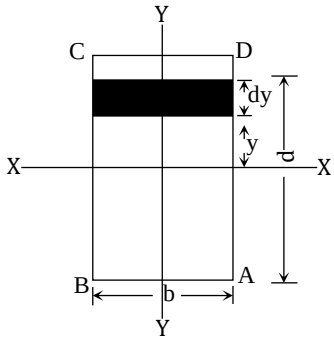
উত্তর ঃ চিত্র হতে, আয়তাকার ক্ষেত্রের প্রস্থ b এবং গভীরতা d.

ভারকেন্দ্রগামী X- অক্ষের সমান্তরালে, X- অক্ষ হতে y দূরত্বে, dy পুরুত্বের একটি ফালি বিবেচনা করি।

তবে ফালির ক্ষেত্রফল হবে $dA = b \times dy$.

তাহলে এই ফালির মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া হবে $d\bar{I}_{xx} = y^2 dA = y^2 b \cdot dy$.

তাহলে সম্পূর্ণ অংশের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া-



$$\bar{I}_{xx} = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} by^2 dy$$

$$= b\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} y^2 dy$$

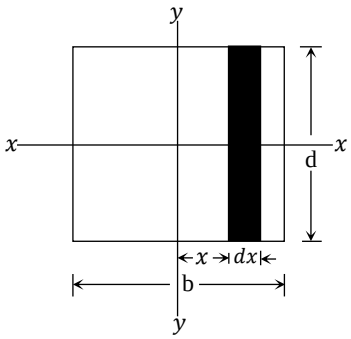
$$= b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}}$$

$$= \frac{b}{3}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^3 - \left(\frac{-d}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{b}{3}\left[\frac{d^3}{8} + \frac{d^3}{8}\right] = \frac{b}{3} \times \frac{2d^3}{8}$$

$$\therefore \bar{I}_{xx} = \frac{b}{3} \times \frac{d^3}{4} = \frac{bd^3}{12}$$ **(প্রমাণিত)**

অনুরূপভাবে,ভারকেন্দ্রগামী Y- অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষুদ্র ফালির জন্য মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া,



$$d\bar{I}_{yy} = x^2 dA = x^2 d \cdot dx = dx^2 dx$$

তাহলে সম্পূর্ণ অংশের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া-

$$\bar{\mathrm{I}}_{yy} = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx^2 \mathrm{d}x = d\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2 \mathrm{d}x$$

$$= d\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \frac{d}{3}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(\frac{b}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{d}{3}\left[\frac{b^3}{8} + \frac{2b^3}{8}\right] = \frac{d}{3} \times \frac{b^3}{4} = \frac{db^3}{12}$$

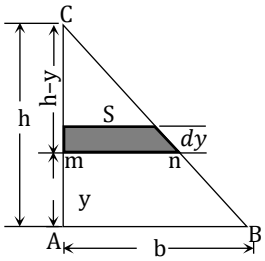
$$\therefore \bar{I}_{yy} = \frac{db^3}{12}$$

**** ২। প্রমাণ কর যে, b ভূমি এবং h উচ্চতার ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া $= \frac{bh^3}{36}$.** বাকাশিবো- ২০১০, ১৩'পরি, ২১

অথবা, ত্রিভুজের ভূমির সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া $= \frac{bh^3}{12}$.

উত্তর ঃ চিত্রে ABC ত্রিভুজের ভূমি b এবং উচ্চতা h.

AB রেখা হতে y দূরত্বে, dy পুরুত্বের একটি ফালি বিবেচনা করি, যার প্রস্থ $\mathrm{mn} = S$.



তাহলে $dA = \mathrm{S}\, dy$

ফালির মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া হবে, $dI_{AB} = y^2 dA = y^2\, S\, dy$

AB রেখার সাপেক্ষে সম্পূর্ণ অংশের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া-

$$I_{AB} = \int_0^h s \cdot y^2 dy$$

$$= \int_0^h \frac{b(h-y)}{h} \cdot y^2 dy$$

সদৃশ ত্রিভুজ $\Delta\mathrm{ABC}$ ও $\Delta\mathrm{mnC}$ হতে পাই, $\frac{h}{b} = \frac{(h-y)}{S}$ $\therefore S = \frac{b(h-y)}{h}$

$$= \frac{b}{h}\int_0^h (hy^2 - y^3)dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h \qquad \left[\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$= \frac{b}{h}\left[\left(h\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4}\right) - \left(h\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{b}{h}\left[\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right]$$

$$\therefore I_{AB} = \frac{b}{h} \times h^4\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right]$$

$$= bh^3 \times \frac{1}{12} = \frac{bh^3}{12}$$ **(প্রমাণিত)**

সমান্তরাল অক্ষীয় উপপাদ্য অনুসারে, ভরকেন্দ্রগামী X- অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

$$\bar{I}_x = I_{AB} - Ad^2$$

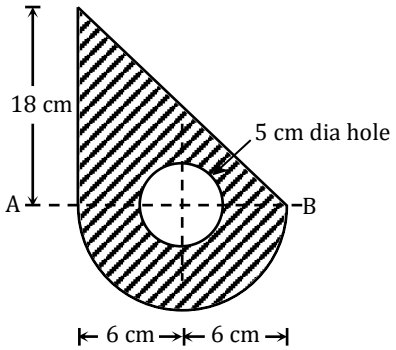
$$= \frac{bh^3}{12} - \frac{1}{2} \times b \times h \times \left(\frac{h}{3}\right)^2$$

$$= \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = bh^3\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18}\right)$$

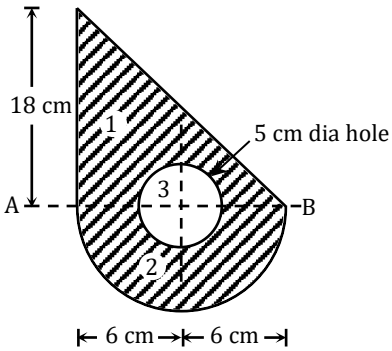
$$= \frac{bh^3}{36}$$ **(প্রমাণিত)**

SOS গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

*** ১। চিত্রে প্রদর্শিত সেকশনটির AB রেখা বরাবর মোমন্টে অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর।** বাকাশিবো-২০০২, ১৪'পরি



সমাধান ঃ দেওয়া আছে,



$b_1 = 6 + 6 = 12 \text{ cm}$

$h_1 = 18 \text{ cm}$

$D_2 = 6 + 6 = 12 \text{ cm}$

$d_3 = 5 \text{ cm}$

AB অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া,

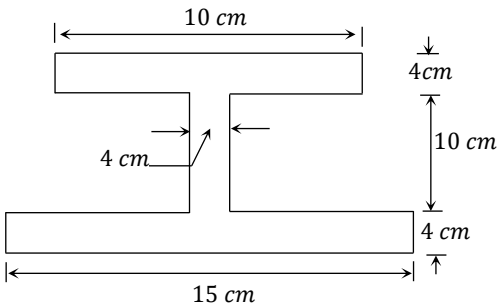
$$I_{AB} = \frac{b_1 h_1^3}{12} + \frac{\pi D_2^4}{128} - \frac{\pi d_3^4}{64}$$

$$= \frac{12 \times 18^3}{12} + \frac{\pi \times 12^4}{128} - \frac{\pi \times 5^4}{64}$$

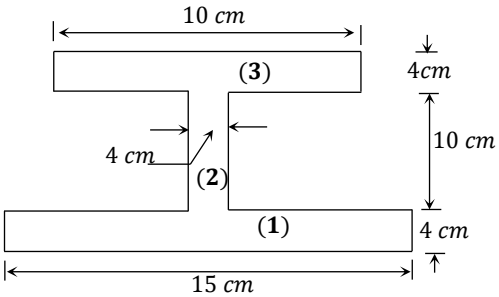
$$= 5832 + 508.93 - 30.68$$

$$= 6310.25 \text{ cm}^4 \textbf{ (Ans.)}$$

***** ২। চিত্রে দেখানো 'I' সেকশনটির কেন্দ্র হতে X এবং Y অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০০৭, ০৯, ১২



সমাধান ঃ যেহেতু সেকশনটি Y – Y অক্ষ বরাবর প্রতিসাম্য, তাই $\overline{X} = 0$. সুতরাং শুধুমাত্র ভারকেন্দ্রের $\overline{Y}$ স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। মনে করি, AB রেফারেন্স লাইন হতে $\overline{Y}$ দূরে সম্পূর্ণ সেকশনটির ভারকেন্দ্র অবস্থিত। এখন সেকশনটিকে তিন অংশে বিভক্ত করি। চিত্রানুযায়ী-



$$b_1 = 15\ cm,\ h_1 = 4\ cm$$
$$b_2 = 4\ cm, h_2 = 10\ cm$$
$$b_3 = 10\ cm, h_3 = 4\ cm$$
$$a_1 = 15 \times 4 = 60\ cm^2$$
$$a_2 = 4 \times 10 = 40\ cm^2$$
$$a_3 = 10 \times 4 = 40\ cm^2$$
$$y_1 = \frac{4}{2} = 2\ cm$$
$$y_2 = 4 + \frac{10}{2} = 9\ cm$$
$$y_3 = 4 + 10 + \frac{4}{2} = 16\ cm$$

আমরা জানি, $\overline{Y} = \frac{a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3}{a_1+a_2+a_3}$

$$= \frac{(60\times2)+(40\times9)+(40\times16)}{60+40+40} = 8 \text{ cm}$$

i) ভারকেন্দ্রগামী X-X অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া-

$\overline{I}_x = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3}$

$= \left(\frac{b_1h_1^3}{12} + a_1d_1^2\right) + \left(\frac{b_2h_2^3}{12} + a_2d_2^2\right) + \left(\frac{b_3h_3^3}{12} + a_3d_3^2\right)$

$= \left\{\frac{15\times4^3}{12} + 60\times6^2\right\} + \left\{\frac{4\times10^3}{12} + 40\times1^2\right\} + \left\{\frac{10\times4^3}{12} + 40\times8^2\right\}$

$[\because d_1 = 8-2 = 6\ cm, d_2 = 9-8 = 1\ cm, d_3 = 16-8 = 8\ cm]$

$= 2240 + 373.33 + 2613.33$

$= 5226.66\ cm^4$ **(Ans.)**

ii) ভারকেন্দ্রগামী Y-Y অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া-

$\overline{I}_y = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_3}$

$= \frac{h_1b_1^3}{12} + \frac{h_2b_2^3}{12} + \frac{h_3b_3^3}{12}$

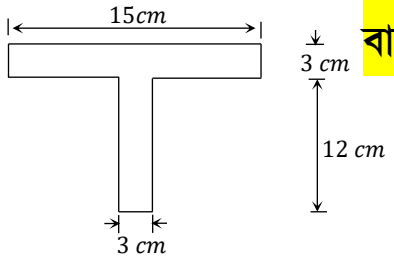
[$\because$ সেকশনটি Y অক্ষের প্রতিসাম্য, তাই $d_1 = d_2 = d_3 = 0$]

$= \frac{4\times15^3}{12} + \frac{10\times4^3}{12} + \frac{4\times10^3}{12}$

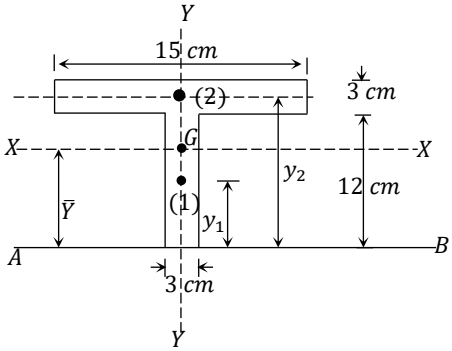
$= 1125 + 53.33 + 333.33$

$= 1511.66\ cm^4$ **(Ans.)**

***** ৩। চিত্রের T সেকশনটির ভারকেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০১৩, ১৫'পরি, ১৯, ২৩



সমাধান ঃ প্রদত্ত সেকশনটি Y-Y অক্ষের প্রতিসাম্য বলে এর ভারকেন্দ্র Y-Y অক্ষে অবস্থান করবে।



ধরি, $\bar{Y}$ = বেস বা রেফারেন্স অক্ষ AB হতে ভারকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্ব। চিত্রানুযায়ী সেকশনটি ২ টি অংশে বিভক্ত করি। যেখানে,

$b_1 = 3\ cm, h_1 = 12\ cm$

$b_2 = 15\ cm\ , h_2 = 3\ cm$

$a_1 = 3 \times 12 = 36cm^2$

$a_2 = 15 \times 3 = 45cm^2$

$y_1 = \frac{12}{2} = 6\ cm$

$y_2 = 12 + \frac{3}{2} = 13.5\ cm$

$\therefore\ \bar{Y} = \frac{a_1y_1+a_2y_2}{a_1+a_2} = \frac{(36\times6)+(45\times13.5)}{36+45}$

$= 10.167\ cm$

i) ভারকেন্দ্রগামী X-X অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া-

$\bar{I}_x = I_{x_1} + I_{x_2}$

$= \left(\frac{b_1h_1^3}{12} + a_1d_1^2\right) + \left(\frac{b_2h_2^3}{12} + a_2d_2^2\right)$

$= \left\{\frac{3\times(12)^3}{12} + 36 \times (4.167)^2\right\} + \left\{\frac{15\times3^3}{12} + 45 \times (3.333)^2\right\}$

$[\because d_1 = \bar{Y} - y_1 = 10.167 - 6 = 4.167\ cm,\ d_2 = y_2 - \bar{Y} = 13.5 - 10.167 = 3.333]$

$= 1057.1 + 533.65 = 1590.75\ cm^4$ **(Ans.)**

ii) ভারকেন্দ্রগামী Y-Y অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া-

$\bar{I}_y = I_{y_1} + I_{y_2}$

$= \frac{h_1 b_1^3}{12} + \frac{h_2 b_2^3}{12}$

[$\because$ সেকশনটি Y অক্ষের প্রতিসাম্য, তাই $d_1 = 0$ এবং $d_2 = 0$]

$= \frac{12\times3^3}{12} + \frac{3\times15^3}{12}$

$= 27 + 843.75$

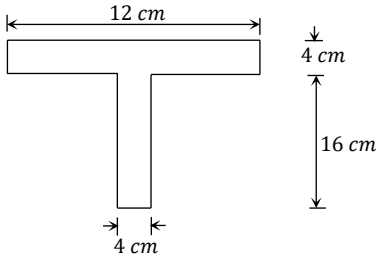
$= 870.75\ cm^4$ **(Ans.)**

***** ৪। নিম্নের চিত্রানুযায়ী T সেকশনের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০১০, ১৫, ১৬, ১৭

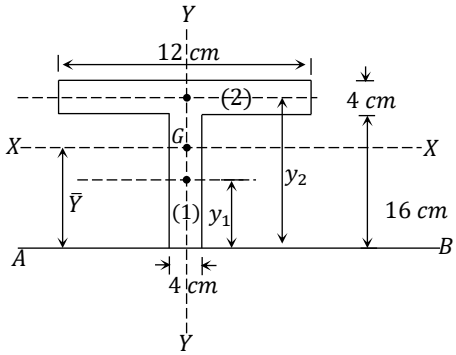
(ক) ভারকেন্দ্রগামী X-X অক্ষের সাপেক্ষে

(খ) ভারকেন্দ্রগামী Y-Y অক্ষের সাপেক্ষে

(গ) সেকশনটির বেস এর সাপেক্ষে



সমাধান ঃ (ক) ও (খ) পর্যন্ত সমাধান প্রশ্ন নং ৮ এর অনুরূপ।



Ans. (ক) $\bar{I}_x = 4172.19\ cm^4$

(খ) $\bar{I}_y = 661.33\ cm^4$

(গ) সেকশনটির বেস AB এর সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

$$I_{AB} = \left(\frac{b_1 h_1^3}{12} + A_1 d_1^2\right) + \left(\frac{b_2 h_2^3}{12} + A_2 d_2^2\right)$$

$$= \left\{\frac{4\times(16)^3}{12} + 4\times 16\times 8^2\right\} + \left\{\frac{12\times 4^3}{12} + 12\times 4\times (18)^2\right\}$$

$$= 5461.33 + 15616$$

$$= 21077.33\ cm^4 \quad \textbf{(Ans.)}$$

অধ্যায়-৭ ঘর্ষণ

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। ঘর্ষণ বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০১৮, ১৮'পরি

উত্তর ঃ পরস্পর সংস্পর্শ যুক্ত দুটি বস্তু যখন একটি অপরটির সাপেক্ষে চলে বা চলার চেষ্টা করে তখন স্পর্শ তলে গতির বিপরীত দিকে যে প্রতিরোধী বল সৃষ্টি হয় তাকে ঘর্ষণ বলে।

*** ২। ঘর্ষণ বল কত প্রকার ও কী কী?** বাকাশিবো- ২০২০

উত্তর ঃ ঘর্ষণ বল প্রধানত দুই প্রকার। যথা ঃ

i) চল ঘর্ষণ বা গতি ঘর্ষণ

ii) স্থির ঘর্ষণ

গতি ঘর্ষণ বল আবার দুই প্রকার। যথা ঃ

i) গড়ানো ঘর্ষণ (Rolling Friction)

ii) পিছলানো ঘর্ষণ (Sliding Friction)

*** ৩। স্লাইডিং ফ্রিকশন কাকে বলে?** বাকাশিবো- ২০২০

উত্তর ঃ যখন একটি বস্তুর উপর দিয়ে অপর একটি বস্তু পিছলিয়ে চলে তখন স্পর্শ তলে যে ঘর্ষণ বল উৎপন্ন হয় তাকে স্লাইডিং ফ্রিকশন বলে।

যেমন ঃ মেঝের উপর দিয়ে কোনো বক্স ঠেলে নিয়ে যাওয়া।

***** ৪। সীমাস্থ ঘর্ষণ (Limiting Friction) কী?**

বাকাশিবো- ২০০৬, ০৮, ০৯, ১২'পরি, ১৫, ২০, ২১'পরি

উত্তর ঃ কোনো স্থির বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করে বস্তুটিকে গতিশীল করলে গতিশীল হওয়ার ঠিক আগ মূহুর্তে বস্তুর স্পর্শ তলে সর্বোচ্চ যে বাধা বল উৎপন্ন হয় তাকে সীমাস্থ ঘর্ষণ বলে।

***** ৫। ঘর্ষণ সহগ (Co-efficient of Friction) বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৬, ১০, ১১, ১২, ১৩'পরি, ১৪, ১৬, ১৭, ১৯, ১৯'পরি, ২০

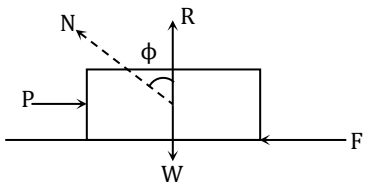
উত্তর ঃ বস্তুর স্পর্শ তলে উৎপন্ন ঘর্ষণ বল বা বাধা বল এবং লম্ব প্রতিক্রিয়া বলের অনুপাতকে ঘর্ষণ সহগ বলে।

একে 'μ' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\mu = \dfrac{\text{ঘর্ষণ বল (F)}}{\text{লম্ব প্রতিক্রিয়া বল (R)}}$.

***** ৬। ঘর্ষণ কোণ বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৫, ১৩'পরি, ১৫, ২০'পরি, ২২

উত্তর ঃ সীমাস্থ ঘর্ষণ বল ও লম্ব প্রতিক্রিয়া বলের লব্ধির সহিত, লম্ব প্রতিক্রিয়া বলের কোণ (Angle) কে ঘর্ষণ কোণ বলে। একে ϕ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



**** ৭। ঘর্ষণের ধর্ম বা বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ।** বাকাশিবো- ২০১১'পরি, ১২, ১৫

উত্তর ঃ ঘর্ষণের বৈশিষ্ট্য সমূহ নিম্নরূপ ঃ

i) পরস্পর সংস্পর্শযুক্ত তলে ঘর্ষণ বল উৎপন্ন হয়।

ii) ঘর্ষণ বল সবসময় গতির বিপরীত দিকে কাজ করে।

iii) তলের মসৃণতার উপর ঘর্ষণ বল নির্ভর করে।

iv) ঘর্ষণ বল তলের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে না।

v) স্থির ঘর্ষণের মান গতি ঘর্ষণ থেকে বেশি হয়।

৮। ঘর্ষণ কোণ $50°$ হলে ঘর্ষণ সহগ কত? বাকাশিবো- ২০১৭'পরি

সমাধান ঃ $\mu = \tan\phi$

$= \tan 50°$

$= 1.191$

দেওয়া আছে,

$\phi = 50°$

SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

*** ১। স্থির ও চল ঘর্ষণের মধ্যে পার্থক্য কী?** বাকাশিবো- ২০১৪

উত্তর ঃ স্থির ঘর্ষণ ও চল ঘর্ষণের মধ্যে পার্থক্য ঃ

স্থির ঘর্ষণ	চল ঘর্ষণ
১) পরস্পর সংস্পর্শ যুক্ত বস্তুর যে কোনো একটি কে বল প্রয়োগ করে গতিশীল করতে চাইলে গতিশীল হওয়ার আগ পর্যন্ত স্পর্শ তলে উৎপন্ন ঘর্ষণ বলকে স্থির ঘর্ষণ বলে।	১) পরস্পর সংস্পর্শ যুক্ত বস্তুর যে কোনো একটি বল প্রয়োগে গতিশীল করলে, গতিশীল হওয়ার পর স্পর্শ তলে উৎপন্ন ঘর্ষণ বলকে চল ঘর্ষণ বলে।

২) স্থির ঘর্ষণ বলের মান চল ঘর্ষণ বলের মানের থেকে বেশি।	২) গতি ঘর্ষণ বলের মান স্থির ঘর্ষণের থেকে কম।

***** ২। স্থির ঘর্ষণের বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ।**

বাকাশিবো- ২০০৪, ০৫, ১০'পরি, ১৩, ১৩'পরি, ১৫, ১৬, ১৭, ১৮, ২১'পরি, ২২

উত্তর ঃ স্থির ঘর্ষণের বৈশিষ্ট্যসমূহ নিম্নরূপ ঃ

i) পরস্পর সংস্পর্শযুক্ত তলে ঘর্ষণ বল উৎপন্ন হয়।
ii) ঘর্ষণ বল সবসময় গতির বিপরীত দিকে কাজ করে।
iii) তলের মসৃণতার উপর ঘর্ষণ বল নির্ভর করে।
iv) ঘর্ষণ বল তলের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে না।
v) স্থীর ঘর্ষণের মান গতি ঘর্ষণ থেকে বেশি হয়।

***** ৩। চল ঘর্ষণের বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ।**

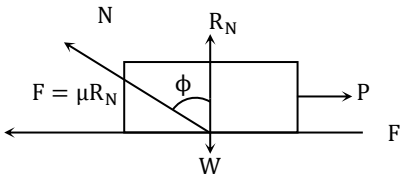
বাকাশিবো- ২০০৫, ০৭, ১০, ১৪, ১৬, ১৮'পরি

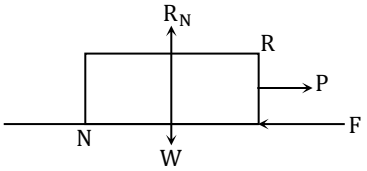
উত্তর ঃ চল ঘর্ষণের বৈশিষ্ট্যসমূহ নিম্নরূপ ঃ

i) পরস্পর সংস্পর্শযুক্ত তলে চল ঘর্ষণ বল উৎপন্ন হয়।
ii) চল ঘর্ষণ বল সবসময় গতির বিপরীত দিকে কাজ করে।
iii) তলের মসৃণতার উপর চল ঘর্ষণ বল নির্ভর করে।
iv) চল ঘর্ষণ বল তলের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে না।
v) চল ঘর্ষণের মান স্থির ঘর্ষণের থেকে একটু কম হয়।

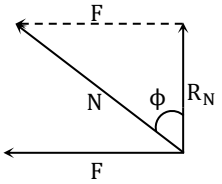
***** ৪। দেখাও যে, ঘর্ষণের ক্ষেত্রে $\mu = \tan\phi$ যখন চিহ্নগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে।** বাকাশিবো-২০০৪, ০৭, ০৯, ১১, ১৪'পরি, ১৬

উত্তর ঃ মনে করি, W ওজনের একটি ব্লক একটি তলের উপর স্থির অবস্থায় আছে। ব্লকটিকে P বলে টানা হচ্ছে যার ফলে স্পর্শ তলে F ফ্রিকশন বল উৎপন্ন হচ্ছে এবং স্পর্শ তলের উলম্ব প্রতিক্রিয়া বল R_N.





ধরি, F ও R_N এর লব্ধি N এবং N ও R_N এর মধ্যবর্তী কোণ ϕ.



আমরা জানি, $\tan\phi = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{F}{R_N}$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{\mu R_N}{R_N} \qquad [F = \mu R_N]$$

$$\therefore \tan\phi = \mu$$

***** ৫। ঘর্ষণের সুবিধা অসুবিধা লেখ।**

বাকাশিবো- ২০১৬'পরি, ১৮'পরি, ১৯, ১৯'পরি, ২০, ২১

উত্তর ঃ ঘর্ষণের যেমন সুবিধা রয়েছে তেমন অসুবিধাও রয়েছে। তা নিম্নে আলোচনা করা হলো ঃ

সুবিধা ঃ

i) ঘর্ষণের কারণে আমরা স্লিপ না করে হাঁটাচলা করতে পারি।

ii) রাস্তার উপর দিয়ে গাড়ি চালাতে পারি।

iii) দেওয়ালে মই লাগিয়ে তার উপর চড়তে পারি।

iv) বেল্ট ড্রাইভের সাহায্যে শক্তি স্থানান্তর করতে পারি ইত্যাদি।

অসুবিধা ঃ

i) ঘর্ষণের কারণে কোনো কিছু স্থানান্তর করতে বা ঘুরাতে গেলে বেশি শক্তির প্রয়োজন হয়।

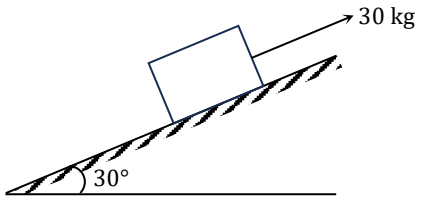
ii) ঘর্ষণের কারণে চলমান অংশ বা ঘূর্ণায়মান অংশ ক্ষয়প্রাপ্ত হয়।

iii) ঘর্ষণের কারণে শব্দের সৃষ্টি হয়।

iv) ঘর্ষণের কারণে যন্ত্রাংশের জীবনশক্তি হ্রাস পায়।

SOS গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। 30° কৌণিক তলের ওপর 108 kg ওজনের বস্তু স্থির অবস্থায় আছে। 30 kg বল বস্তুটিকে হেলানো তল বরাবর ওপরের দিকে ঠেলছে। বস্তুটি নিচের দিকে পিছলিয়ে পড়া থেকে বাধা প্রদান করার জন্য কত ঘর্ষণ বল প্রয়োজন এবং ঘর্ষণ সহগের মান কত? বাকাশিবো- ২০০৯, ১৬'পরি, ১৯



সমাধান ঃ বলগুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

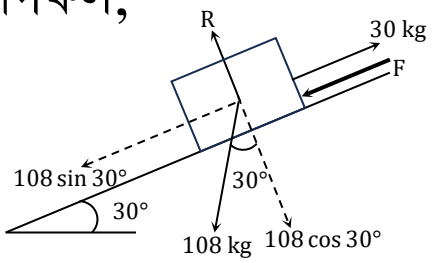
$$(\overset{\nwarrow}{+})\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow R - 108\cos 30° = 0$$

$$\Rightarrow R = 108\ \cos 30°$$

$$\therefore R = 93.53\ \text{kg}$$

বলগুলির অনুভূমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,



Free body diagram (F. B. D)

$$(\overset{\nearrow}{+})\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow 30 - F - 108\sin 30° = 0$$

$$\Rightarrow F = -24$$

$$\therefore F = 24\text{ kg}\ (\nearrow)\ \textbf{(Ans.)}$$

[F এর মান (−) আসার কারণ আমরা যেদিকে F কল্পনা করছি (↙) F সেদিকে ক্রিয়া না করে বিপরীত দিকে (↗) ক্রিয়া করছে। অর্থাৎ ব্লকটি উপরের দিকে না যেয়ে নিচের দিকে যাচ্চে যার ফলে F বলটি উপরের দিকে কাজ করছে। কোনো অংকে এমন (−) মান আসলে (−) টিকে আবার (+) আকারে লিখে চিহ্ন ঘুরিয়ে দিতে হবে। যেমনটি এই সমাধানে করা হয়েছে।]

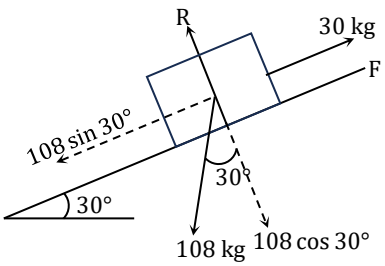
আমরা জানি, $F = \mu R$

$$\Rightarrow \mu = \frac{F}{R}$$

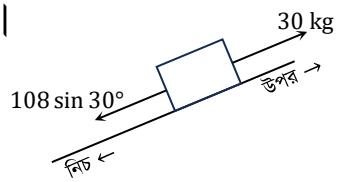
$$\Rightarrow \mu = \frac{24}{93.53}$$

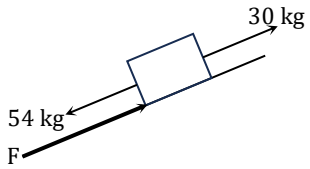
$$\therefore \mu = 0.25\ \textbf{(Ans.)}$$

Note ঃ আমরা যদি এই (−) এর সমস্যায় পড়তে না চাই তাহলে F বল কোন দিকে হবে তা আগে নির্ণয় করে নিতে হবে। এ জন্য প্রথমে অনুভূমিক উপাংশের বলগুলির মান নির্ণয় করতে হবে। যেদিকে বলের মান বেশি হবে F তার বিপরীতে কাজ করবে। কারণ বল যেদিকে বেশি ব্লক সেদিকে যাবে।



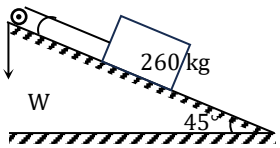
যেমন ঃ যেহেতু নিচের দিকে বলের পরিমাণ বেশি সেহেতু F উপর দিকে ক্রিয়া করবে।



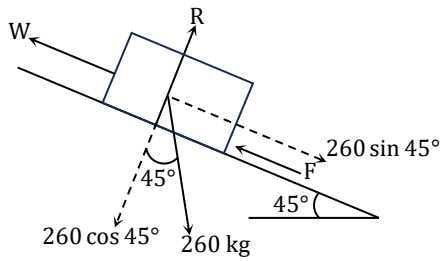


২। চিত্রের W এর মান কত হলে বস্তুটি নিচের দিকে নামবে? ঘর্ষণ সহগ $\mu = 0.38$

বাকাশিবো- ২০০৬, ০৭, ১১



সমাধান ঃ বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,



$$(\overset{\nearrow}{+}) \sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow R - 260 \cos 45° = 0$$

$$\therefore R = 183.84 \text{ kg}$$

বল গুলির অনুভূমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$(\overset{\searrow}{+}) \sum F_x = 0$$

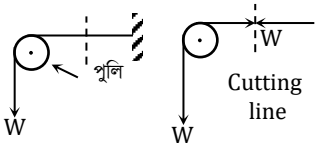
$$\Rightarrow 260 \sin 45° - F - W = 0$$

$$\Rightarrow W = 260 \sin 45° - F$$

$$= 260 \sin 45° - \mu R \qquad [F = \mu R]$$

$$= 260 \sin 45° - 0.38 \times 183.84 \quad [R \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

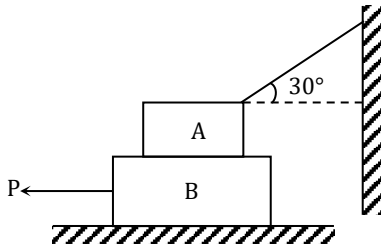
$$= 113.98 \text{ kg } \textbf{(Ans.)}$$



মসৃণ পুলির ক্ষেত্রে পুলির উভয় পাশের বল সমান থাকে এবং রোফ বা দড়ির কোনো অংশ কাট করলে কাটিং অংশের উভয় প্রান্তের বল সমান ও বিপরীতমুখি হয়।

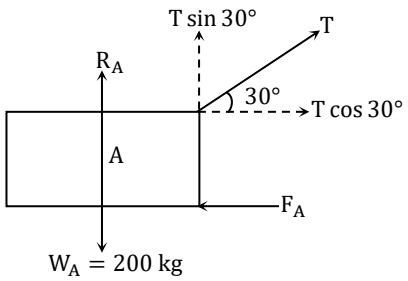
৩। চিত্রে A ও B ব্লক দুটির ওজন যথাক্রমে 200 kg ও 300 kg. P এর মান কত হলে ব্লকটি গতির উপক্রম হবে। সব তলের জন্য μ=0.3।

বাকাশিবো- ২০১০'পরি, ১৪'পরি, ১৫'পরি, ২০



সমাধান ঃ For Block A

বল গুলির উলম্ব উপাংশে বীজগাণিতিক যোগফল,

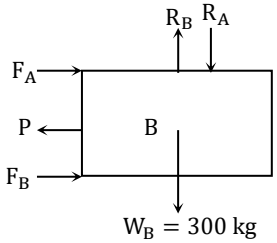


$$(\overset{\uparrow}{+}) \sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow R_A + T\sin 30° - 200 = 0$$

$$\therefore R_A = 200 - T\sin 30°$$

বলগুলির অনুভূমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,



$$(\overset{\rightarrow}{+}) \sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow T\cos 30° - F_A = 0$$

$$\Rightarrow T\cos 30° - \mu R_A = 0 \qquad [F = \mu R_A]$$

$$\Rightarrow T\cos 30° - 0.3 \times (200 - T\sin 30°) = 0$$

[R_A এর মান বসিয়ে]

$$\Rightarrow T\cos 30° - 0.3 \times 200 + 0.3\,T\sin 30° = 0$$

$$\Rightarrow 0.866T - 60 + 0.15T = 0$$

$$\Rightarrow 0.016T - 60 = 0$$

$$\Rightarrow 0.16T = 60$$

$$\Rightarrow T = \frac{60}{0.016}$$

$$\therefore T = 59.05 \text{ kg}$$

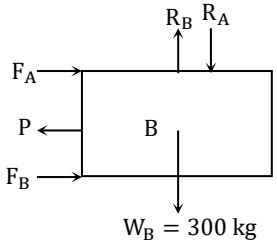
T এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$R_A = 200 - 59.05 \sin 30°$

$\therefore R_A = 170.47$ kg

এখন, For Block B

বল গুলির উলম্ব উপাংশে বীজগাণিতিক যোগফল,



$(\overset{\uparrow}{+}) \sum F_y = 0$

$\Rightarrow R_B - R_A - W_B = 0$

$\Rightarrow R_B = R_A + W_B$

$\Rightarrow R_B = 170.47 + 300$ [R_A ও W_B এর মান বসিয়ে]

$\therefore R_B = 470.47$ kg

বলগুলির অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$(\overset{\rightarrow}{+}) \sum F_x = 0$

$\Rightarrow F_A + F_B - P = 0$

$\Rightarrow P = F_A + F_B$

$\Rightarrow P = \mu R_A + \mu R_B$ [$F = \mu R$]

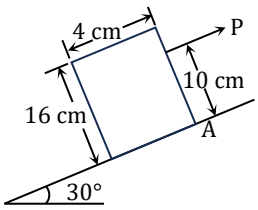
$\Rightarrow P = \mu(R_A + R_B)$

$\Rightarrow P = 0.3(170.47 + 470.47)$ [R_A ও R_B এর মান বসিয়ে]

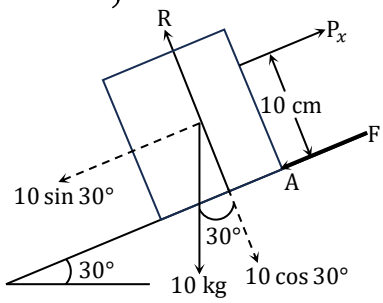
$\therefore P = 192.28$ kg **(Ans.)**

৪। 10 kg ওজনের একটি আয়তাকার ব্লককে নিম্নের চিত্রানুযায়ী 30° হেলান তলে রেখে এটির উপর তলের সমান্তরালে P বলে টানা হচ্ছে। ঘর্ষণ সহগ 0.35 হলে ব্লকটি পিছলিয়ে উপরে উঠবে নাকি উল্টে পড়বে?

বাকাশিবো- ২০২০



সমাধান ঃ বল গুলির উলম্ব উপাংশে বীজগাণিতিক যোগফল,



পিছলানোর জন্য F. B. D

$$(\overset{\nwarrow}{+})\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow R - 10\cos 30° = 0$$

$$\Rightarrow R = 10\cos 30°$$

$$\therefore R = 8.66 \text{ kg}$$

ধরি, পিছলানোর বল P_x

বলগুলির অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$(\overset{\nearrow}{+})\sum F_x = 0$$

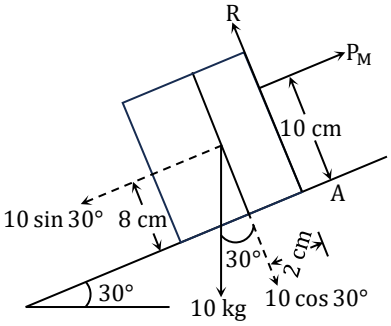
$$\Rightarrow P_x + F - 10\sin 30° = 0$$

$$\Rightarrow P_x = 10\sin 30° + F$$

$$\Rightarrow P_x = 10\sin 30° + \mu R$$

$$\Rightarrow P_x = 10\sin 30° + 0.35 \times 8.66$$

$$\therefore P_x = 8.09 \text{ kg}$$ **(Ans.)**



উল্টানোর জন্য F.B.D

ধরি, উল্টানোর জন্য বল P_M

A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$\circlearrowleft +) \sum M_A = 0$

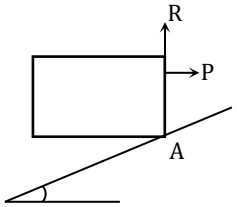
$\Rightarrow -(10 \sin 30°) \times 8 - (10 \cos 30°) \times 2 + P_M \times 10 = 0$

$\Rightarrow 10P_M = (10 \sin 30° \times 8) + (10 \cos 30° \times 2)$

$\Rightarrow 10P_M = 57.32$

$\Rightarrow P_M = \frac{57.32}{10}$

$\therefore P_M = 5.73$ kg



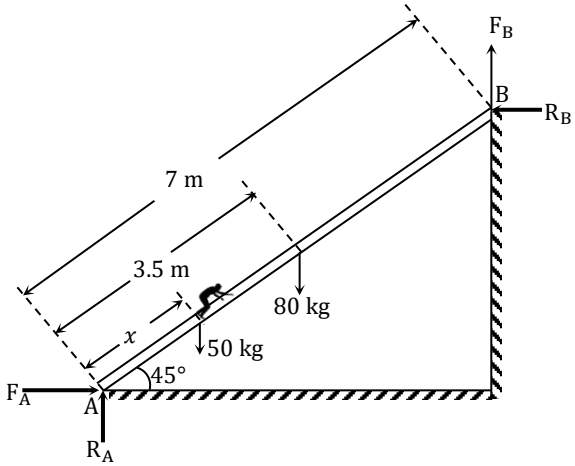
$P_M < P_x$ [P_M, P_x থেকে ছোট]

সুতরাং ব্লকটি উল্টাবে।

৫। 7 m লম্বা 80 kg ওজনের একটি মই 45° কোণে খাড়া দেওয়ালের সাথে স্থাপন করা আছে। মইটির নিচ থেকে কত মিটার ওপর 50 kg বল ঝুলালে মইটি পিছলিয়ে যাওয়ার উপক্রম হয়? $\mu = \frac{1}{3}$

DUET: 2013-14, বাকাশিবো- ২০১১

সমাধান ঃ ধরি, A বিন্দু থেকে x m উপরে 50 kg বল ঝুলাতে হবে।
বল গুলির অনুভূমিক উপাংশে বীজগাণিতিক যোগফল,



$$(\overset{\nearrow}{+}) \sum F_x = 0$$
$$\Rightarrow F_A - R_B = 0$$
$$\Rightarrow F_A = R_B$$
$$\Rightarrow \mu R_A = R_B$$
$$\Rightarrow R_A = \frac{R_B}{\mu}$$
$$\Rightarrow R_A = \frac{R_B}{\frac{1}{3}} \qquad \left[\mu = \frac{1}{3}\right]$$
$$\therefore R_A = 3\,R_B$$

বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$(\overset{\uparrow}{+}) \sum F_y = 0$$
$$\Rightarrow R_A + F_A - 50 - 80 = 0$$
$$\Rightarrow R_A + \mu R_B - 130 = 0$$
$$\Rightarrow 3R_B + \frac{1}{3}R_B = 130 \qquad \left[R_A = 3R_B,\ \ \mu = \frac{1}{3}\right]$$
$$\Rightarrow \frac{10}{3}R_B = 130$$

$\Rightarrow R_B = 130 \times \frac{3}{10}$

$\therefore R_B = 39$ kg

A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$(\circlearrowleft +)\sum M_A = 0$

$\Rightarrow 50 \times x \cos 45° + 80 \times 3.5 \cos 45° - F_B \times 7 \cos 45° - R_B \times 7 \sin 45° = 0$

$\Rightarrow 25\sqrt{2}x + 197.99 - 4.95\, F_B - 4.95 R_B = 0$

$\Rightarrow 25\sqrt{2}x + 197.99 - 4.95 \times \mu R_B - 4.95 R_B = 0$

$\Rightarrow 25\sqrt{2}x + 197.99 - 4.95 \times \frac{1}{3} \times 39 - 4.95 \times 39 = 0$ [μ এবং R_B এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 25\sqrt{2}x - 59.41 = 0$

$\Rightarrow 25\sqrt{2}x = 59.41$

$\Rightarrow x = \frac{59.41}{25\sqrt{2}}$

$\therefore x = 1.68$ m **(Ans.)**

অধ্যায়-৮ বিমের উপর সাপোর্ট বলের প্রতিক্রিয়া

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। প্রতিক্রিয়া বল বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০০৯, ১৩'পরি, ১৫, ১৯'পরি

উত্তর ঃ কোনো সাপোর্টের উপর বল প্রয়োগ করলে উক্ত সাপোর্ট প্রযুক্ত বলের বিপরীত দিকে সম পরিমাণ প্রতিরোধী বল প্রয়োগ করে যার ফলে সাপোর্ট সাম্যাবস্থায় থাকে। এ প্রতিরোধী বলকে প্রতিক্রিয়া বল বলে।

***** ২। বিম বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো-২০১১, ১৪, ১৫, ১৬, ২০, ২০'পরি

উত্তর ঃ বিম হলো একটি অনুভূমিক কাঠামো যা এক বা একাধিক সাপোর্টের উপর স্থাপন করা হয় এবং বিম তার উপর প্রযুক্ত লোডকে সাপোর্টে স্থানান্তরিত করে।

***** ৩। বিমে কী কী ধরনের লোড কাজ করে?**

বাকাশিবো- ২০১১, ১১'পরি, ১২, ১২'পরি, ১৩, ১৩'পরি, ১৪'পরি, ১৫'পরি, ১৮

উত্তর ঃ বিমের উপর প্রধানত ৩ ধরনের লোড কাজ করে। যথা ঃ

i) কেন্দ্রীভূত লোড (Point Load)
ii) সমভাবে বিস্তৃত লোড (Uniformly Distributed Load)
iii) অসমভাবে বিস্তৃত লোড (Non-Uniformly Distributed Load)

***** ৪। বিম কত প্রকার ও কী কী?** বাকাশিবো-২০০৯, ১৪, ১৬, ১৮'পরি, ১৯, ২০'পরি

উত্তর ঃ সাপোর্ট অনুসারে বিম পাঁচ প্রকার। যথা ঃ

i) সাধারণভাবে স্থাপিত বিম (Simply Supported Beam)
ii) ধারাবাহিক বিম (Continuous Beam)
iii) ক্যান্টিলিভার বিম (Cantilever Beam)
iv) ঝুলন্ত বিম (Over Hanging Beam)
v) আবদ্ধ বিম (Fixed Beam)

***** ৫। স্ট্যাটিক্যালি ডিটারমিনেট বিম কী?**

বাকাশিবো- ২০১১, ১১'পরি, ১৫'পরি, ২০, ২০'পরি

উত্তর ঃ যে সকল বিমের প্রতিক্রিয়া বল সাম্যাবস্থার সূত্রের সাহায্যে $(\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M = 0)$ নির্ণয় করা যায় তাদেরকে স্ট্যাটিক্যালি ডিটারমিনেট বিম বলে।

৬। বিমে কী কী স্ট্রেস উৎপন্ন হয়? বাকাশিবো- ২০০৮

উত্তর ঃ বিমে সাধারণত দুই ধরনের স্ট্রেস উৎপন্ন হয়। যথা ঃ

i) বেন্ডিং স্ট্রেস (Bending Stress)
ii) শিয়ার স্ট্রেস (Shear Stress)

বেন্ডিং স্ট্রেস আবার দুই ধরনের। যথা ঃ

i) টানা পীড়ন (Tensile Stress)
ii) চাপা পীড়ন (Compressive Stress)

***** ৭। বিমের বিপজ্জনক সেকশন কাকে বলে?**

বাকাশিবো- ২০০৬, ০৭, ০৯, ১৩'পরি, ১৪, ১৬, ১৭

উত্তর ঃ বিমের যে সেকশনে শিয়ার ফোর্স এর মান শূন্য হয় এবং বেন্ডিং মোমেন্টের মান সর্বোচ্চ হয় তাকে বিপজ্জনক সেকশন বলে। বিপজ্জনক সেকশনে শিয়ার ফোর্সের চিহ্ন পরিবর্তিত হয়।

***** ৮। শিয়ার ফোর্স ও বেন্ডিং মোমেন্ট বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০২, ০৪, ১০, ১৩, ১৩'পরি, ১৪, ১৬, ১৭

উত্তর ঃ **শিয়ার ফোর্স ঃ** বিমের যেকোনো সেকশনের ডানের বা বামের যে কোনো এক দিকের উপর ক্রিয়ারত উলম্ব বল গুলির বীজগাণিতিক যোগফলকে শিয়ার ফোর্স বলে।

বেন্ডিং মোমেন্ট ঃ বিমের যেকোনো সেকশনের ডানে বা বামে যেকোনো এক দিকের উপর ক্রিয়ারত বল গুলির মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফলকে বেন্ডিং মোমেন্ট বলে।

**** ৯। ইনফ্লেকশন পয়েন্ট বলতে কী বুঝায়?** **বাকাশিবো- ২০১১, ১৫, ১৫'পরি**

উত্তর ঃ বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের যে বিন্দুতে বেন্ডিং মোমেন্ট চিহ্ন পরিবর্তন করে তাকে ইনফ্লেকশন পয়েন্ট বলে।

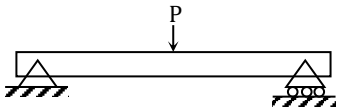
SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

**** ১। বিমের প্রকারভেদ চিত্রসহ লেখ।**

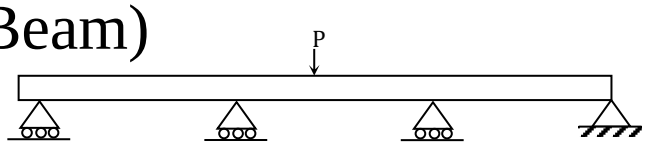
বাকাশিবো- ২০০৯, ১১, ১২'পরি, ১৩, ১৩'পরি, ১৪, ১৫'পরি, ১৬, ১৬'পরি, ১৭, ১৯, ২০

উত্তর ঃ

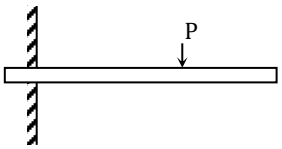
i) সাধারণভাবে স্থাপিত বিম (Simply Supported Beam)



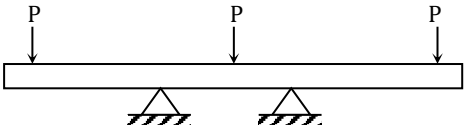
ii) ধারাবাহিক বিম (Continuous Beam)



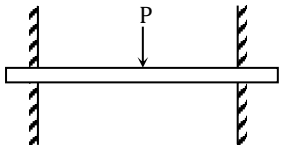
iii) ক্যান্টিলিভার বিম (Cantilever Beam)



iv) ঝুলন্ত বিম (Over Hanging Beam)



v) আবদ্ধ বিম (Fixed Beam)



***** ২। বিমে অর্পিত লোড কয় প্রকার ও কী কী? চিত্রসহ লেখ।**

বাকাশিবো- ২০০৮, ০৯, ১১, ১৫

উত্তর ঃ বিমের উপর প্রধানত ৩ ধরনের লোড কাজ করে। যথা

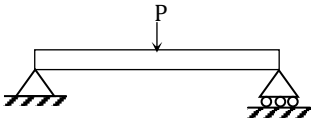
i) কেন্দ্রীভূত লোড (Point Load)

ii) সমভাবে বিস্তৃত লোড (Uniformly Distributed Load)

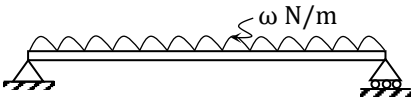
iii) অসমভাবে বিস্তৃত লোড (Non-Uniformly Distributed Load)

অসমভাবে বিস্তৃত লোডকে আবার সমভাবে পরিবর্তিত (Uniformly varying Load) লোডও বলে।

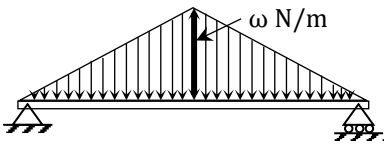
i) কেন্দ্রীভূত বা বিন্দু লোড (Point Load)



ii) সমভাবে বিস্তৃত লোড (Uniformly Distributed Load)



iii) অসমভাবে বিস্তৃত লোড বা সমভাবে পরিবর্তিত লোড (Non-uniformly distributed load or uniformly varying load)

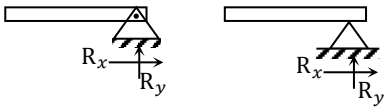


**** ৩। চিত্রসহ রোলার সাপোর্ট ও হিঞ্জ সাপোর্টের বর্ণনা দাও।**

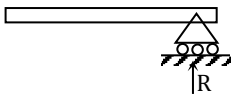
বাকাশিবো-২০০৮, ১৫'পরি

উত্তর ঃ পিন সাপোর্ট (Pinned Support) বা হিঞ্জ সাপোর্ট (Hinged Support) ঃ

হিঞ্জ সাপোর্ট-এ প্রতিক্রিয়া বল উলম্ব ও অনুভূমিক উভয় অক্ষ বরাবর ক্রিয়া করে।



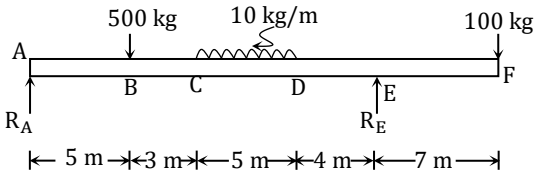
রোলার সাপোর্ট (Roller Support) ঃ Roller Support এর প্রতিক্রিয়া বল স্পর্শ তলের লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।

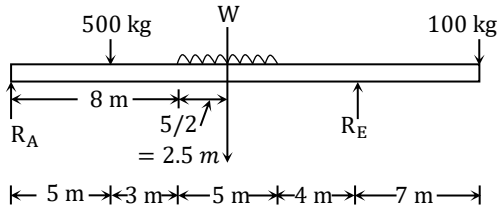


SOS গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। চিত্রে 24 m লম্বা বিমকে দুটি সাপোর্টের উপর বসানো আছে। সাপোর্ট দুটোর প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় কর।

বাকাশিবো- ২০১০, ২২





সমাধান ঃ

$$W = \omega L = 10 \times 5 = 50\ kg$$

A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $\left(\circlearrowleft +\right) \Sigma M_A = 0$

$$\Rightarrow 500\times5+W\times(8+2.5)-R_E\times17+100\times24 = 0$$

$$\Rightarrow R_E \times 17 = 2500 + 50 \times 10.5 + 2400$$

$$\Rightarrow R_E = \frac{2500+50\times10.5+2400}{17}$$

$$\therefore R_E = 319.11\ kg$$

বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল, $\left(\begin{matrix}\uparrow\\+\end{matrix}\right) \Sigma F_y = 0$

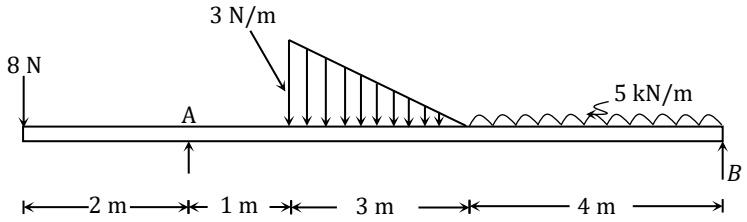
$$\Rightarrow R_A + R_E - 500 - W - 100 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 500 + W + 100 - R_E$$

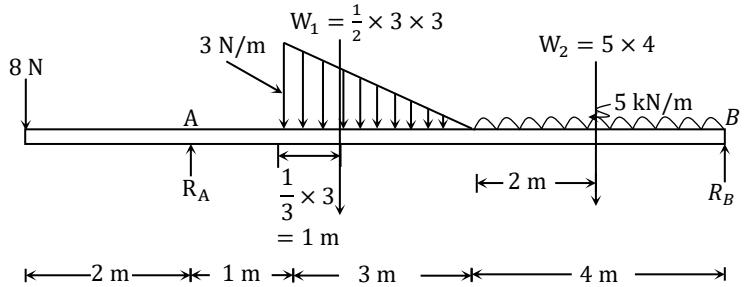
$$\Rightarrow R_A = 500 + 50 + 100 - 319.11$$

$$\therefore R_A = 330.88\ kg$$ **(Ans.)**

২। চিত্রানুযায়ী $10\ m$ দৈর্ঘ্যের বিমটির উপর লোড স্থাপন করা আছে। A ও B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় কর। বাকাশিবো- ২০১১, ১৩



সমাধান ঃ



A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $\left(\begin{matrix}\circlearrowleft\\+\end{matrix}\right) \Sigma\ M_A = 0$

$$\Rightarrow -8\times2 + \left(\frac{1}{2}\times3\times3\right)\times(1+1) + (5\times4)(4+2) - R_B\times8 = 0$$

$$\Rightarrow -16 + 4.5 \times 2 + 20 \times 6 = R_B \times 8$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{-16+4.5\times2+20\times6}{8}$$

$$\therefore R_B = 14.125\ KN$$

বল গুলোর উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল, $\binom{\uparrow}{+} \Sigma F_y = 0$

$$\Rightarrow R_A + R_B - 8 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - 5 \times 4 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 8 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 + 5 \times 4 - R_B$$

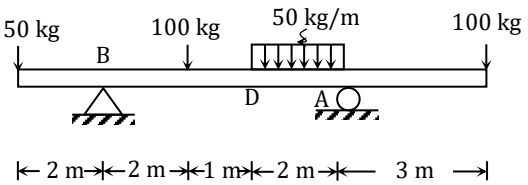
$$\Rightarrow R_A = 8 + 4.5 + 20 - R_B$$

$$\Rightarrow R_A = 32.5 - 14.125$$

$$\therefore R_A = 18.375\ N\ \textbf{(Ans.)}$$

৩। নিম্নের চিত্রে সমান্তরাল বিমের ওপর লোডের পরিমাণ ও অবস্থান দেখানো আছে। সাপোর্ট দুটোর প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় কর।

বাকাশিবো- ২০১০'পরি, ১২



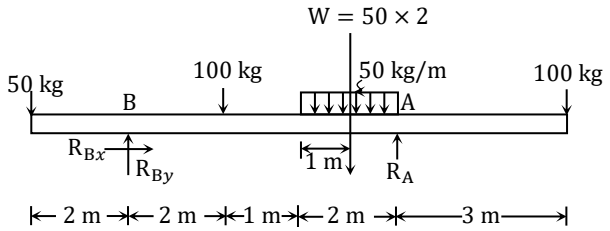
সমাধান ঃ B বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $\binom{\circlearrowleft}{+} \Sigma\ M_B = W \times 1$

$$\Rightarrow -50 \times 2 + 100 \times 2 + (50 \times 2) \times 4 - R_A \times 5 + 100 \times 8 = 0$$

$$\Rightarrow -100 + 200 + 400 - R_A \times 5 + 800 = 0$$

$$\Rightarrow R_A \times 5 = -100 + 200 + 400 + 800$$

$$\Rightarrow R_A \times 5 = 1300$$
$$\Rightarrow R_A = \frac{1300}{5}$$
$$\therefore R_A = 260\ kg$$



বল গুলোর উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল, $\binom{\uparrow}{+} \Sigma F_y = 0$

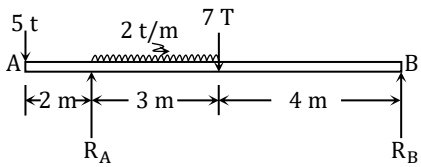
$$\Rightarrow -50 + R_B - 100 - (50 \times 2) + R_A - 100 = 0$$
$$\Rightarrow R_B = 50 + 100 + (50 \times 2) + 100 - R_A$$
$$\Rightarrow R_B = 350 - 260$$
$$\therefore R_B = 90\ kg \textbf{ (Ans.)}$$

B বিন্দুতে পিন সাপোর্ট আছে। পিন সাপোর্টে ২টি রিয়্যাকশন থাকে। তাই R_{Bx} ও R_{By} দেখানো হয়েছে। কিন্তু R_{Bx} এর মান শূন্য (0) তাই B বিন্দুতে শুধু মাত্র একটি রিয়্যাকশন (R_{By}) দেখালেও হবে।

৪। নিম্নের চিত্রানুযায়ী বিমটির ওপর লোড আরোপিত। A ও B এর প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় কর। **বাকাশিবো-২০১১'পরি, ২১'পরি**

সমাধান ঃ ৩ নং এর অনুরূপ

(Ans. $R_A = 15.14$ t, $R_B = 2.86$ t**)**



অধ্যায়-৯ ট্রাসের উপর সাপোর্ট বলের প্রতিক্রিয়া

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। ট্রাস বা ফ্রেম বলতে কী বুঝ?** বাকাশিবো- ২০১২'পরি, ১৩, ১৮, ২১

উত্তর ঃ ট্রাস হলো ত্রিভুজ আকৃতির এক বা একাধিক দৃঢ় কাঠামো যা অনেকগুলো স্ট্রেট মেম্বারের সমন্বয়ে গঠিত এবং মেম্বারসমূহ পিন জয়েন্ট বা রিভেট জয়েন্ট দ্বারা সংযুক্ত থাকে।

***** ২। পারফেক্ট ফ্রেম বা পূর্ণাঙ্গ ট্রাস বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৯, ০৯'পরি, ১০, ১১'পরি, ১৩, ১৪'পরি, ১৫, ২২

উত্তর ঃ কোনো ট্রাসের উপর লোড প্রয়োগ করলে ট্রাসটি যদি সাম্যাবস্থায় থাকে এবং আকার আকৃতির কোনো পরিবর্তন না হয় তবে তাকে পূর্ণাঙ্গ ট্রাস বলে। পূর্ণাঙ্গ ট্রাস অবশ্যই $(n = 2j - 3)$ সূত্রটি মেনে চলে। যেখানে $n =$ মেম্বার সংখ্যা, $j =$ জয়েন্ট সংখ্যা।

***** ৩। টাই এবং স্ট্রাট বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৮, ০৯, ১০'পরি, ১১, ১৩'পরি, ১৪, ১৪'পরি, ২২

উত্তর ঃ যে সকল মেম্বার টানা বল (Tensile Load) বহন করে তাদের টাই বলে এবং যে সকল মেম্বার চাপা বল (Compressive Load) বহন করে তাদের স্ট্রাট বলে।

***** ৪। ফ্রি-বডি ডায়াগ্রাম বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৮, ১০, ১৪'পরি, ১৫'পরি, ১৫, ২১'পরি

উত্তর ঃ ট্রাসের বা কোনো মেম্বাররের বিভিন্ন অংশকে তাদের উপর প্রযুক্ত বল সমূহ, তাদের ডিরেকশনসহ কাগজে অঙ্কন করলে যে চিত্র পাওয়া যায় তাকে ফ্রি-বডি ডায়াগ্রাম বলে।

***** ৫। পূর্ণাঙ্গ ট্রাস নির্ণয়ের সূত্রটি লেখ।** বাকাশিবো- ২০১১, ১৪

উত্তর ঃ পূর্ণাঙ্গ ট্রাস নির্ণয়ের সূত্র নিম্নরূপ ঃ

$n = 2j - 3$

$n =$ মেম্বার সংখ্যা

$j =$ জয়েন্ট সংখ্যা

SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। ট্রাস মেম্বারের বল নির্ণয় পদ্ধতির যে-কোনো একটি বিস্তারিত বর্ণনা দাও।** বাকাশিবো-২০১২, ২০

উত্তর ঃ জয়েন্ট পদ্ধতি ঃ এই পদ্ধতিতে $\sum F_x = 0$ এবং $\sum F_y = 0$ সূত্রদ্বয় প্রয়োগ করে মেম্বারের বল নির্ণয় করা হয়। প্রতিটি জয়েন্টকে আলাদা করে বলের বহুভুজ হিসাবে বিবেচনা করা হয়।

বল নির্ণয়ের ধাপসমূহ ঃ

i) ট্রাসটিকে ফ্রি-বডি কল্পনা করে প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় করতে হবে।

ii) প্রতিটি জয়েন্টে, $\sum F_x = 0$ এবং $\sum F_y = 0$ প্রয়োগ করে মেম্বারের বল নির্ণয় করতে হবে।

iii) বাম প্রান্তের জয়েন্ট থেকে মাঝখানের দিক এবং ডান প্রান্তের জয়েন্ট থেকে মাঝখানের দিকের মেম্বারসমূহের বল নির্ণয় সুবিধাজনক।

iv) হেলানো বলের উলম্ব ও অনুভূমিক উপাংশ নির্ণয় করার ক্ষেত্রে, বল বিভাজন করতে হবে।

v) যেকোনো জয়েন্টে দুইয়ের অধিক মেম্বারের বল অজানা থাকলে অন্য জয়েন্ট হতে যেকোনো একটি বলের মান বের করে নিতে হবে।

**** ২। পূর্ণাঙ্গ ও অপূর্ণাঙ্গ ফ্রেমের মধ্যে পার্থক্য লেখ।** বাকাশিবো- ২০০৯, ১৩

উত্তর ঃ পূর্ণাঙ্গ ও অপূর্ণাঙ্গ ফ্রেমের মধ্যে পার্থক্য নিম্নরূপ ঃ

পূর্ণাঙ্গ ফ্রেম	অপূর্ণাঙ্গ ফ্রেম
i) ট্রাসের মেম্বারের সংখ্যা $n = 2j - 3$ এর মান সমান হবে।	i) ট্রাসের মেম্বারের সংখ্যা $n = 2j - 3$ এর মান কম বা বেশি হবে।
ii) লোড প্রয়োগে আকৃতির পরিবর্তন না করে সাম্যাবস্থায় থাকবে।	ii) লোড পয়োগে আকৃতির পরিবর্তন ঘটে।

৩। আদর্শ ট্রাসের গুণাবলি লেখ। বাকাশিবো- ২০২০

উত্তর ঃআদর্শ ট্রাসের নিম্নের গুণাবলি থাকা প্রয়োজন। যথা ঃ

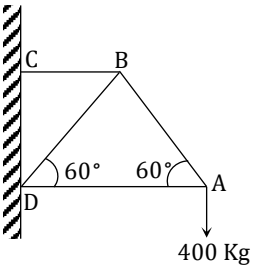
i) কাঠামোটি পূর্ণাঙ্গ কাঠামো হবে।

ii) মেম্বারগুলো ঘর্ষণবিহীন পিন বা হিনজ দ্বারা সংযুক্ত হতে হবে।

iii) অক্ষ বরাবর লোড বহনে সক্ষম হবে।

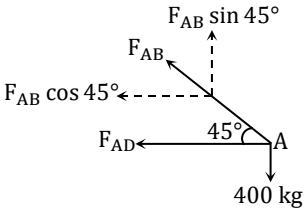
SOS গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। নিম্নের চিত্রে প্রদত্ত ট্রাস এর AB, BC, BD এবং AD দণ্ডের বলের মান ও প্রকৃতি নির্ণয় কর। বাকাশিবো- ২০০৯, ১৯'পরি'



সমাধান ঃ Joint -A

বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,



$$\binom{\uparrow}{+}\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow F_{AB}\ \sin 45° - 400 = 0$$

$$\Rightarrow F_{AB} \sin 45° = 400$$

$$\Rightarrow F_{AB} = \frac{400}{\sin 45°}$$

$$\therefore F_{AB} = 565.59 \text{ kg (Tension)} \quad (\textbf{Ans.})$$

বল গুলির অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\binom{\uparrow}{+}\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow -F_{AD} - F_{AB} \cos 45° = 0$$

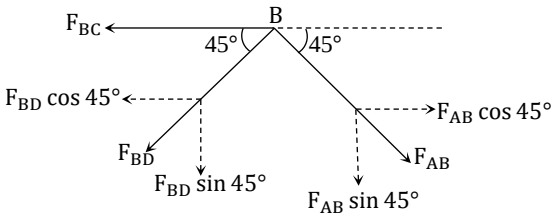
$$\Rightarrow F_{AD} = -F_{AB}\ \cos 45°$$

$$\Rightarrow F_{AD} = -565.5 \cos 45°$$

$$\therefore F_{AD} = 400 \text{ kg (Compression)} \quad (\textbf{Ans.})$$

Joint -B

বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,



$$\binom{\uparrow}{+}\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow -F_{BD}\ \sin 45° - F_{AB}\ \sin 45° = 0$$

$$\Rightarrow -F_{BD} \times \sin 45° - (565.59\ \times\ \sin 45°) = 0$$

$$\Rightarrow -F_{BD}\ \sin 45° - 565.59 \times \sin 45° = 0$$

$$\Rightarrow F_{BD} \sin 45° = -565.59 \times \sin 45°$$

$$\Rightarrow F_{BD} = -565.69 \text{ kg}$$

$$\therefore F_{BD} = 565.69 \text{ kg (Comprssion)}\ \ (\textbf{Ans.})$$

বল গুলির অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\binom{\rightarrow}{+}\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow F_{AB}\ \cos 45° - F_{BD}\ \cos 45° - F_{BC} = 0$$

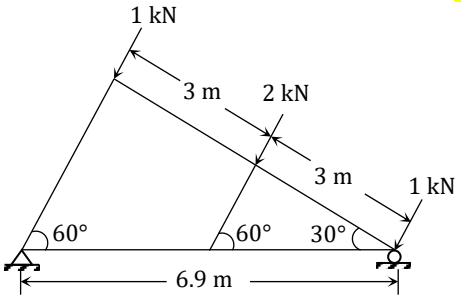
$$\Rightarrow 565.59 \times \cos 45° - (-565.59\ \times\ \cos 45°) - F_{BC} = 0$$

$$\Rightarrow F_{BC} = 565.59 \cos 45° + 565.59\ \times\ \cos 45°$$

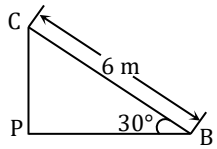
$$\therefore F_{BC} = 800 \text{ kg (Tension)}\ \textbf{(Ans.)}$$

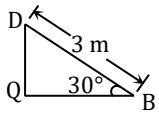
২। চিত্রানুযায়ী ট্রাসটির সাপোর্ট দুটির প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

বাকাশিবো- ২০১১'পরি', ১৩'পরি



সমাধান ঃ ΔBCP হতে পাই,



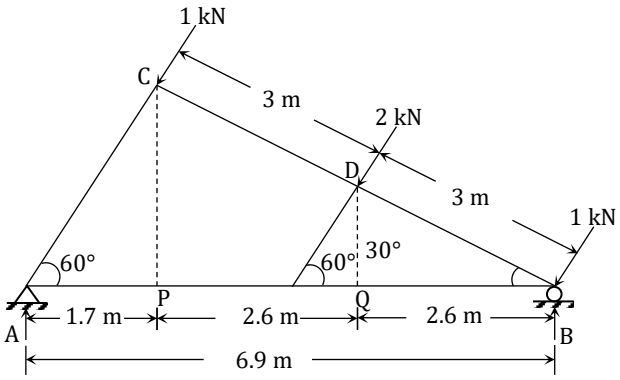


$$\cos 30° = \frac{BP}{BC}$$

$$\Rightarrow BP = BC \cos 30°$$

$$\Rightarrow BP = 6 \cos 30°$$

$$\therefore BP = 5.2m$$



এখানে,

$$AB = 6.9m$$

$$BP = 5.2$$

$$BQ = 2.6$$

$$PQ = BP - BQ$$

$$= 5.2 - 2.6$$

$$= 2.6$$

$$AP = AB - PB$$

$$= 6.9 - 5.2$$

$$= 1.7m$$

আবার, $\sin 30° = \frac{CD}{BC}$

$\Rightarrow CP = 6 \sin 30°$

$\therefore CP = 3m$

Δ BDQ হতে পাই,

$\cos 30° = \frac{BQ}{BD}$

$\Rightarrow BQ = BD \cos 30°$

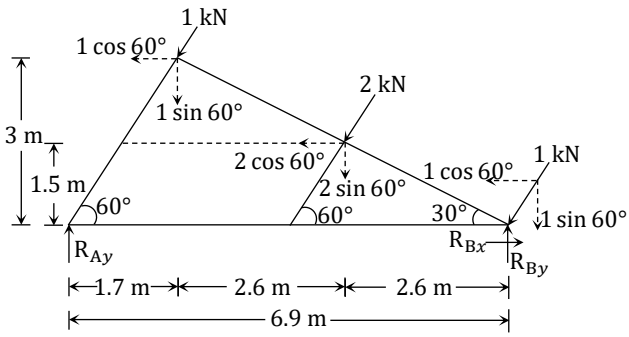
$\Rightarrow BQ = 3 \cos 30°$

$\therefore BQ = 2.6m$

আবার, $\sin 30° = \frac{DQ}{BD}$

$DQ = 3 \sin 30°$

$\therefore DQ = 1.5$ m



A বিন্দুতে Moment নিয়ে পাই,

$\left(\circlearrowleft_{+}\right) \sum M_A = 0$

$\Rightarrow -1 \cos 60° \times 3 + 1 \sin 60° \times 1.7 - 2 \cos 60° \times 1.5 + 2 \sin 60° \times (1.7 + 2.6) - 1 \sin 60° \times 6.9 - R_{By} \times 6.9 = 0$

$\Rightarrow -0.5 \times 3 + 0.866 \times 1.7 - 1 \times 1.5 + 1.73 \times 4.3 + 0.86 \times 6.9 - R_{By} \times 6.9 = 0$

$\Rightarrow 11.86 - R_{By} \times 6.9 = 0$

$\Rightarrow R_{By} \times 6.9 = 11.86$

$\Rightarrow R_{By} = \frac{11.86}{6.9}$

$\therefore R_{By} = 1.72$ kN **(Ans.)**

বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$\binom{\uparrow}{+} \sum F_y = 0$

$\Rightarrow R_A - 1\sin 60° - 2\sin 60° - 1\sin 60° + R_{By} = 0$

$\Rightarrow R_A + R_{By} = 1\sin 60° + 2\sin 60° + 1\sin 60°$

$\Rightarrow R_A = 3.464 - R_{By}$

$\Rightarrow R_A = 3.464 - 1.72$

$\therefore R_A = 1.74$ kN (**Ans.**)

বল গুলির অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$\binom{\rightarrow}{+} \sum F_x = 0$

$\Rightarrow R_{Bx} - 1\cos 60° - 2\cos 60° - 1\cos 60° = 0$

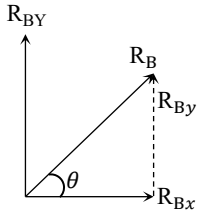
$\Rightarrow R_{Bx} = 1\cos 60° + 2\cos 60° + 1\cos 60°$

$\therefore R_{Bx} = 2$ kN

$\therefore R_B = \sqrt{(R_{Bx})^2 + (R_{By})^2} = \sqrt{1.74^2 + 2^2}$

$= 2.65$ kN **(Ans.)**

আবার, $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$

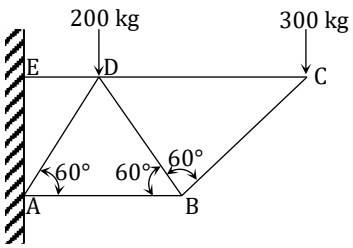


$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{R_{By}}{R_{Bx}}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{1.72}{2}$$

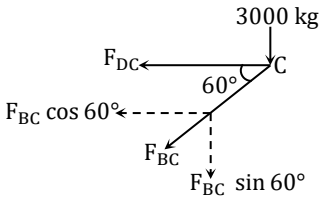
$$\therefore \theta = 40.7° \textbf{ (Ans.)}$$

৩। নিম্নের চিত্রের ক্যান্টিলিভার ট্রাসটির বাহুগুলোর বলের মান ও প্রকৃতি নির্ণয় কর। **বাকাশিবো-২০১০পরি, ১৩'পরি', ১৫'পরি**



সমাধান ঃ **Joint -C**

বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,



$$\begin{pmatrix}\uparrow\\+\end{pmatrix}\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow -300 - F_{BC} \times \sin 60° = 0$$

$$\Rightarrow F_{BC}\sin 60° = -300$$

$$\Rightarrow F_{BC} = \frac{-300}{\sin 60°}$$

$$\Rightarrow F_{BC} = -346.41$$

$$\therefore F_{BC} = 346.41 \text{ kg(Compression)} \textbf{ (Ans.)}$$

বল গুলির অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\left(\overset{\rightarrow}{+}\right)\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow\ -F_{CD} - F_{BC} \times \cos 60 = 0$$

$$\Rightarrow\ -F_{CD} - (-346.41) \times \cos 60° = 0$$

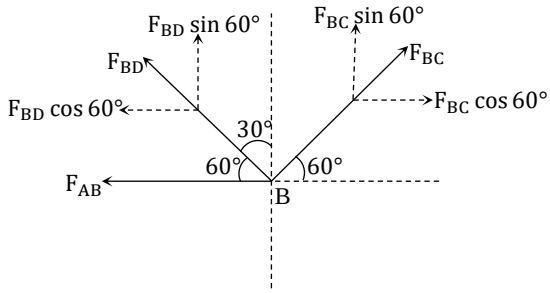
$$[F_{BC} = -346.41 \text{ kg}]$$

$$\Rightarrow\ -F_{CD} + 346.41 \times \cos 60° = 0$$

$$\therefore F_{CD} = 173.21 \text{ kg (Tension)}$$ **(Ans.)**

Joint -B

বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,



$$\left(\overset{\uparrow}{+}\right)\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow F_{BC} \sin 60° + F_{BD} \sin 60° = 0$$

$$\Rightarrow -346.41 \times \sin 60° + F_{BD} \times \sin 60° = 0$$

$$[F_{BC} = -346.41 \text{ kg}]$$

$$\Rightarrow F_{BD} \sin 60° = 346.41 \sin 60°$$

$$\Rightarrow F_{BD} = \frac{346.41 \sin 60°}{\sin 60°}$$

$$\therefore F_{BD} = 346.41 \text{ kg (Tension)}$$ **(Ans.)**

বল গুলির অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\left(\overset{\rightarrow}{+}\right)\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow F_{BC}\ \cos 60° - F_{AB} - F_{BD}\ \cos 60° = 0$$

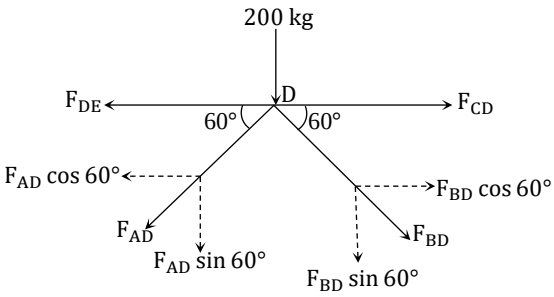
$$\Rightarrow\ -3.46.41\ \times\ \cos 60° - F_{AB} - 346.41 \times \cos 60° = 0$$

$$\Rightarrow F_{AB} = -346.41 \cos 60° - 346.41 \cos 60°$$

$$\Rightarrow F_{AB} =\ -346.41\ \text{kg}$$

$$\therefore F_{AB} =\ 346.41\text{kg}\ \ (\text{Compression})$$ **(Ans.)**

Joint -D



বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\left(\overset{\uparrow}{+}\right)\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow -200 - F_{BD}\ \sin 60° - F_{AD}\ \sin 60° = 0$$

$$\Rightarrow -200 - 346.41\ \times\ \sin 60° - F_{AD}\ \times\ \sin 60° = 0$$

$$\Rightarrow F_{AD} \sin 60° = -200 - 346.41 \sin 60°$$

$$\Rightarrow F_{AD} = -\frac{500}{\sin 60°}$$

$$\Rightarrow F_{AD} =\ -577.35\ \text{kg}$$

$$\therefore F_{AD} = 577.35\ \text{kg}\ \ (\text{Compression})$$ **(Ans.)**

বল গুলির অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\left(\overset{\rightarrow}{+}\right)\sum F_x = 0$$

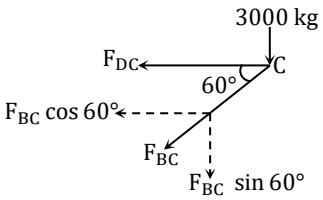
$$\Rightarrow F_{CD} + F_{BD}\ \cos 60° - F_{DE} - F_{AD}\ \cos 60° = 0$$

$$\Rightarrow 173.21 + 346.41 \times \cos 60° - F_{DE} - (-577.35 \times \cos 60°)$$

$$\Rightarrow 173.21 + 173.21 - F_{DE} + 288.68 = 0$$

$$\therefore F_{DE} = 635.095kg \text{ (Tension)}$$ **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতিতে সমাধান

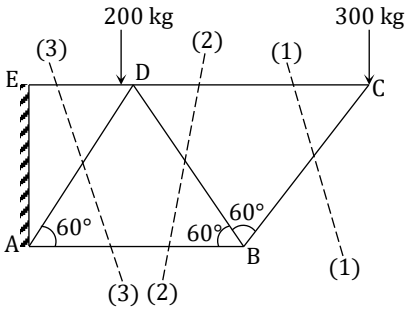


Method of Sections

Section (1-1) এর ডান পার্শ্ব

বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\left(\overset{\uparrow}{+}\right)\sum F_y = 0$$



$$\Rightarrow -300 - F_{BC}\ \sin 60° = 0$$

$$\Rightarrow F_{BC} \sin 60° = -300$$

$$\Rightarrow F_{BC} = \frac{-300}{\sin 60°}$$

$$\Rightarrow F_{BC} = -346.41 \text{ kg}$$

$$\therefore F_{BC} = 346.41 \text{ kg (Compression)}$$ **(Ans.)**

বল গুলির অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\left(\overset{\rightarrow}{+}\right)\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow\ -F_{DC} - F_{BC}\ \cos 60° = 0$$

$$\Rightarrow\ -F_{DC} - \ (-346.41\ \times\ \cos 60°) = 0$$

$$\therefore F_{DC} = 173.21\ \text{kg(Tension)}\ \textbf{(Ans.)}$$

Section (2-2) এর ডান পার্শ্ব

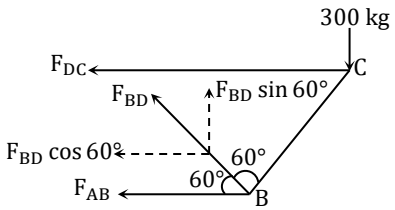
বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\left(\overset{\uparrow}{+}\right)\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow\ -300 + F_{BD}\ \sin 60° = 0$$

$$\Rightarrow F_{BD} = \frac{300}{\sin 60°}$$

$$\therefore F_{BD} = 346.41\ \text{kg (Tension)}\ \textbf{(Ans.)}$$



বল গুলির অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\left(\overset{\rightarrow}{+}\right)\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow -F_{DC} - F_{AB} - F_{BD}\ \cos 60°\ = 0$$

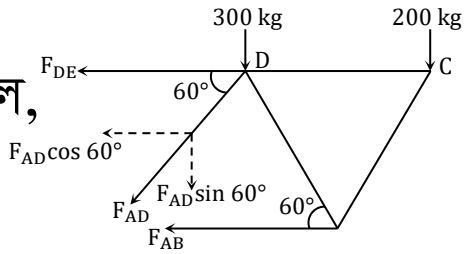
$$\Rightarrow -173.21 - F_{AB} - 346.41\ \times\ \cos 60° = 0$$

$$\Rightarrow -F_{AB} = -173.21 - 346.41 \cos 60°$$

$$\Rightarrow F_{AB} = -346.41\ \text{kg}$$

$$\therefore F_{AB} = 346.41\ \text{kg}\ \ (\text{Compression})\ \ (\textbf{Ans.})$$

Section (3-3) এর ডান পার্শ্ব



বল গুলির উলম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\binom{\uparrow}{+}\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow -200 - 300 - F_{AD} \times \sin 60° = 0$$

$$\Rightarrow F_{AD}\sin 60° = -500$$

$$\Rightarrow F_{AD} = \frac{(-500)}{\sin 60°}$$

$$\Rightarrow F_{AD} = -577.35 \text{ kg}$$

$$\therefore F_{AD} = 577.35 \text{ kg (Compression)} \quad (\textbf{Ans.})$$

বল গুলির অনুভুমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল,

$$\binom{\rightarrow}{+}\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow -F_{DE} - F_{AB} - F_{AD}\cos 60° = 0$$

$$\Rightarrow -F_{DE} - (-346.41) - (-577.35\cos 60°) = 0$$

$$\Rightarrow -F_{DE} + 346.41 + 288.68 = 0$$

$$\therefore F_{DE} = 635.095 \text{ kg (Tension)} \quad \textbf{(Ans.)}$$

অধ্যায়-১০

গিয়ার ট্রেইন

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

**** ১। গিয়ার বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০০৫, ১৬

অথবা, গিয়ার কী?

উত্তর ঃ গিয়ার হলো এক ধরনের ঘূর্ণনশীল যন্ত্র যার দাঁত বা কগ থাকে, যা আরেকটি দাঁতযুক্ত অংশের সাথে যুক্ত হয়ে পাওয়ার স্থানান্তর করে। একে শ্যাফটের সাথে দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ করে ব্যবহার করা হয়।

২। চালক ও চালিত গিয়ার বলতে কী বুঝায়?

উত্তর ঃ শক্তি স্থানান্তরের জন্য শক্তির উৎসের শ্যাফটের সাথে সংযোজিত গিয়ারকে চালক গিয়ার এবং যে গিয়ারকে অন্য একটি শ্যাফটের সাথে সংযুক্ত করে ঘুরানো হয়, তাকে চালিত গিয়ার বলে।

***** ৩। সার্কুলার পিচ এর ফর্মুলাটি লেখ।** বাকাশিবো- ২০১০

উত্তর ঃ

$$\text{সার্কুলার পিচ বা পিচ} = \frac{\text{পিচ সার্কেলের পরিধি}}{\text{দাঁতের সংখ্যা}}$$

$$= \frac{\pi \times \text{পিচ সার্কেলের ব্যাস}}{\text{দাঁতের সংখ্যা}}$$

যদি, d = পিচ সার্কেলের ব্যাস এবং T = দাঁতের সংখ্যা ধরা হয়, তবে

পিচ, $p = \frac{\pi d}{T}$

*** ৪। র‍্যাক এবং পিনিয়ন বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০০৫

অথবা, পিনিয়ন কাকে বলে?

উত্তর ঃ পরস্পরের সাথে সংযুক্ত দুটি গিয়ারের মাঝে যদি একটি সোজা গিয়ার এবং অপরটি বৃত্তাকার গিয়ার থাকে, তবে সোজা গিয়ারকে র‍্যাক এবং বৃত্তাকার গিয়ারকে পিনিয়ন বলে।

আবার, পরস্পরের সাথে সংযুক্ত দুইটি বৃত্তাকার গিয়ারের মধ্যে ছোট গিয়ারটিকে সবসময় পিনিয়ন বলা হয়। পিনিয়নকে ফলোয়ার গিয়ারও বলা হয়ে থাকে।

৫। গিয়ার ট্রেইন বলতে কী বুঝায? বাকাশিবো- ২০১০, ১১'পরি, ১১, ১৫, ১৭, ১৮'পরি

অথবা, গিয়ার ট্রেইনের কাজ কী? বাকাশিবো- ২০০৭, ১৬'পরি

অথবা, Gear Train কী? বাকাশিবো- ২০১৫'পরি

উত্তর ঃ অনেক সময় দুই বা ততোধিক গিয়ারকে একটির সাথে অপরটি সংযুক্ত করে এক শ্যাফট থেকে অন্য শ্যাফটে শক্তি স্থানান্তর করা হয়। শক্তি স্থানান্তরের জন্য গিয়ার সমূহের এরূপ সমাবেশকে গিয়ার ট্রেইন বা ট্রেইন অব হুইল বলে। গিয়ার ট্রেইনের মাধ্যমে ঘূর্ণন গতি, গতির দিক এবং টর্ক কে পরিবর্তন করে ব্যবহার করা যায়।

**** ৬। কম্পাউন্ড বা যৌগিক গিয়ার ট্রেইন বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০৮, ২০

উত্তর ঃ বেগের অনুপাত কম বেশি করে গতিশক্তি স্থানান্তরের জন্য চালক ও চালিত গিয়ারের মধ্যে একাধিক মধ্যবর্তী গিয়ার সংযুক্ত করা হয়। এই নিমিত্তে একই শ্যাফটে দুই বা ততোধিক ভিন্ন ভিন্ন আকারের গিয়ারের সমাবেশকে কম্পাউন্ড বা যৌগিক গিয়ার ট্রেইন বলে।

**** ৭। ইপিসাইক্লিক গিয়ার ট্রেইন বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০২০

উত্তর ঃ গিয়ার ট্রেইন এ অনেক সময় একটি চাকা আবদ্ধ থাকে এবং অন্যান্য চাকাগুলো একটি বাহুর সাহায্যে স্থির চাকার চারদিকে ঘুরানো হয়, এরূপ গিয়ার ব্যবস্থাকে ইপিসাইক্লিক গিয়ার ট্রেইন বলে।

SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

**** ১। বিভিন্ন প্রকার গিয়ারের নাম লেখ।** বাকাশিবো- ২০১০, ১৬

উত্তর ঃ বিভিন্ন প্রকার গিয়ারের নাম নিচে দেওয়া হলো-

ক) পরস্পর সংযুক্ত হওয়ার দিক বিবেচনা করে গিয়ারকে তিন শ্রেণিতে বিভক্ত করা যায়। যথা ঃ

i) বহিঃস্থ গিয়ার (External Gear)
ii) অন্তঃস্থ গিয়ার (Internal Gear)
iii) র‍্যাক এবং পিনিয়ন গিয়ার (Rack and Pinion Gear)

খ) শ্যাফটের অক্ষের অবস্থান অনুযায়ী গিয়ার তিন প্রকার। যথা ঃ

i) প্যারালাল শ্যাফট গিয়ার (Parallel shaft Gear)
ii) ইন্টারসেকটিং শ্যাফট গিয়ার (Intersecting Shaft Gear)
iii) নন ইন্টারসেকটিং শ্যাফট গিয়ার (Non- Intersecting Shaft Gear)

গ) সচরাচর ব্যবহৃত কিছু গিয়ারের নাম নিম্নে দেওয়া হলো ঃ

i) স্পার গিয়ার (Spur gear)
ii) হেলিক্যাল গিয়ার (Helical gear)
iii) বেভেল গিয়ার (Bevel gear)
iv) স্পাইরাল বা স্কিউ গিয়ার (Spiral or skew gear)
v) ওয়ার্ম গিয়ার (Worn gear)

**** ২। গিয়ার ড্রাইভ এর সুবিধা ও অসুবিধাগুলো লিখ?** বাকাশিবো- ২০১০, ২০

উত্তর ঃ গিয়ার ড্রাইভ এর সুবিধা সমূহ ঃ

i) এটি যথাযথভাবে বেগের অনুপাত পরিবহন করে।
ii) এটি উচ্চ দক্ষতা সম্পন্ন
iii) এটি দৃঢ় লে-আউট সম্পন্ন
iv) অধিক শক্তি পরিবহন করতে পারে।
v) এটি ব্যবহারে বিশ্বস্ত

গিয়ার ড্রাইভ এর অসুবিধাসমূহ ঃ

i. গিয়ার তৈরিতে বিশেষ ধরনের যন্ত্রপাতি এবং টুলস এর প্রয়োজন হয়।
ii. গিয়ার তৈরির মেশিনে গিয়ার তৈরি চলাকালীন সময়ে ভাইব্রেশন বা কম্পনের কারণে দাঁতে যে কোন ধরনের ত্রুটি হতে পারে।
iii. একটি গিয়ারের যে কোন ধরনের ত্রুটির জন্য সম্পূর্ণ ব্যবস্থাটি অকেজো হয়ে যায়।

**** ৩। ডায়ামেট্রাল পিচ ও মডিউলের মধ্যে পার্থক্য লেখ?** বাকাশিবো- ২০০৪

উত্তর ঃ ডায়ামেট্রাল পিচ এবং মডিউলের মধ্যে পার্থক্য নিম্নে দেওয়া হলো ঃ

ডায়ামেট্রাল পিচ ঃ কোন একটি গিয়ারের দাঁতের সংখ্যা এবং উক্ত গিয়ারের পিচ সার্কেল ডায়ামিটার বা ব্যাস এর অনুপাতকে, ঐ গিয়ারের ডায়ামেট্রাল পিচ বলে। একে P_d দ্বারা প্রকাশ করা হয়। গিয়ারের পরিচয় প্রায়ই এ সংখ্যা দ্বারা দেয়া হয়ে থাকে। যেমন ঃ '12 পিচ' বা $12P_d$ গিয়ারের দ্বারা এমন একটি গিয়ারকে বুঝায় যার ডায়ামেট্রাল পিচ $= 12$।

গাণিতিকভাবে, ডায়ামেট্রাল পিচ, $P_d = \dfrac{T \text{ (দাঁতের সংখ্যা)}}{P_d \text{ (পিচ সার্কেলের ব্যাস)}}$

মডিউল ঃ কোন একটি গিয়ারের পিচ ডায়ামিটার এবং উক্ত গিয়ারের দাঁত সংখ্যার অনুপাতকে ঐ গিয়ারের মডিউল বলে। একে m দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এটি ডায়ামেট্রাল পিচ এর বিপরীত। দুটি গিয়ার মেশিং (সংযুক্ত) হওয়ার জন্য গিয়ার দুটির মডিউল অবশ্যই সমান হতে হবে। গাণিতিকভাবে

মডিউল, $m = \dfrac{d \text{ (পিচ সার্কেলের ডায়ামিটার)}}{T \text{ (দাঁতের সংখ্যা)}} = \dfrac{1}{P_d \text{ (ডায়ামেট্রাল পিচ)}}$

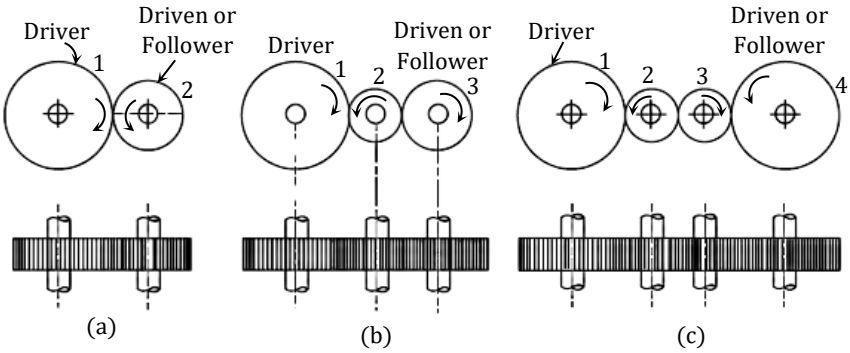
***** 4। গিয়ার ট্রেইন কত প্রকার ও কী কী? চিত্রসহ লেখ।** বাকাশিবো-০৭, ০৯

অথবা, চিত্রসহ গিয়ার ট্রেইনের শ্রেণিবিন্যাস কর। বাকাশিবো- ২০০৫

অথবা,চিত্রের মাধ্যমে ইপিসাইক্লিক গিয়ার ট্রেইন বর্ণনা কর। বাকাশিবো-০২, ১৩

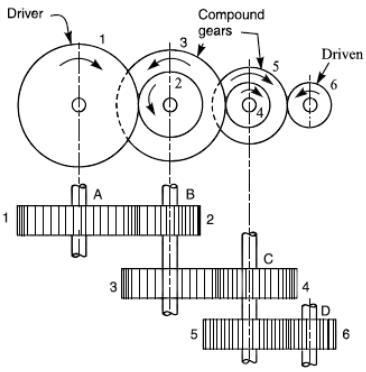
উত্তর ঃ গিয়ার ট্রেইন সাধারণত তিন প্রকার। চিত্র সহ প্রকারভেদ গুলো সংক্ষেপে আলোচনা করা হলো। যথা ঃ

ক) সিম্পল গিয়ার ট্রেইনে একটি শ্যাফটে মাত্র একটি গিয়ার ব্যবহার করে এক শ্যাফট থেকে অন্য একটি শ্যাফটে শক্তি স্থানান্তর করা হয়।



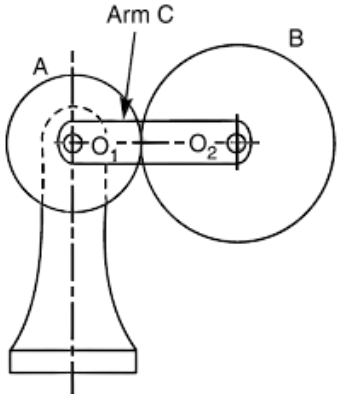
চিত্র ঃ Simple Gear Train

খ) কম্পাউন্ড গিয়ার ট্রেইন (Compound gear train) ঃ বেগের অনুপাত কমবেশি করে গতিশক্তি স্থানান্তরের জন্য চালক ও চালিত গিয়ারের মধ্যে একাধিক মধ্যবর্তী গিয়ার সংযুক্ত করা হয়। সুতরাং যে গিয়ার ট্রেইনে একই শ্যাফটে দুই বা ততোধিক ভিন্ন ভিন্ন আকারের মধ্যবর্তী গিয়ারগুলোর সমাবেশ থাকে, তাকে কম্পাউন্ড বা যৌগিক গিয়ার ট্রেইন বলে।



চিত্র ঃ Compound gear train

গ) ইপিসাইক্লিক গিয়ার ট্রেইন (Epicyclic gear Train) ঃ সাধারণ গিয়ার ব্যবস্থায় প্রতিটি গিয়ার তার নিজস্ব আক্ষের সাথে মুক্তভাবে ঘুরে। কিন্তু অনেক ক্ষেত্রে একটি গিয়ার কে স্থির বা আবদ্ধ রেখে এবং অন্য গিয়ার গুলোকে একটি বাহু (Arm) এর সাহায্যে স্থির গিয়ারের চারিদিকে ঘুরানোর প্রয়োজন হয়। এরূপ গিয়ার ব্যবস্থাকেই ইপিসাইক্লিক গিয়ার ট্রেইন বলে। একে প্লানেট্যারি গিয়ার ট্রেইন (Planetary gear train) ও বলা হয়।



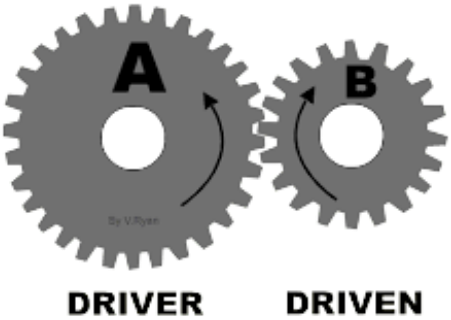
চিত্র ঃ Epicyclic gear train

**** ৫। সিম্পল গিয়ারের বেগের অনুপাত কীভাবে নির্ণয় করা হয়?**

বাকাশিবো- ২০১৮'পরি

অথবা, সিম্পল গিয়ারের বেগের অনুপাতের সূত্রটি প্রতিপাদন কর।

উত্তর ঃ চালক গিয়ার এবং চালিত বা ফলোয়ার গিয়ারের মধ্যকার বেগের অনুপাতকে সিম্পল গিয়ারের বেগের অনুপাত বলে। চিত্রে একটি সিম্পল গিয়ার ড্রাইভ দেখানো হয়েছে।



মনে করি, N_1 = গিয়ার A বা চালক গিয়ারের ঘূর্ণন সংখ্যা

N_2 = গিয়ার B বা চালিত গিয়ারের ঘূর্ণন সংখ্যা

d_1 = চালক গিয়ারের পিচ সার্কেলের ব্যাস

d_2 = চালিত গিয়ারের পিচ সার্কেলের ব্যাস

T_1 = চালক গিয়ারের দাঁতের সংখ্যা

T_2 = চালিত গিয়ারের দাঁতের সংখ্যা

m = গিয়ারের মডিউল

আমরা জানি, চালক গিয়ারের মডিউল, $m = \frac{d_1}{T_1}$ .....(i)

এবং চালিত গিয়ারের মডিউল, $m = \frac{d_2}{T_2}$ .....(ii)

যেহেতু দুইটি গিয়ারের সংযোগ হওয়ার জন্য উভয় গিয়ারের মডিউল সমান হতে হবে, তাই সমীকরণ (i) ও (ii) নং থেকে পাই,

$$\frac{d_1}{T_1} = \frac{d_2}{T_2}$$

বা, $\frac{d_1}{d_2} = \frac{T_1}{T_2}$

আবার, $\pi d_1 N_1 = \pi d_2 N_2$

বা, $\frac{d_1}{d_2} = \frac{N_2}{N_1}$ বা, $\frac{N_1}{N_2} = \frac{d_2}{d_1}$

অতএব বেগের অনুপাত, $V.R = \frac{N_1}{N_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{T_2}{T_1}$

SOS গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

***** ১। একটি কম্পাউন্ড হুইলের গিয়ার 1, 2, 3, 4, 5, এবং 6 এর দাঁতগুলো যথাক্রমে 80, 40, 50, 25, 30, এবং 12। হুইল 1 যখন 30 rpm এ ঘুরে তখন 6 নং হুইলের গতি বের কর।** বাকাশিবো- ২০১০, ১১, ১৩'পরি

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

চালক গিয়ারের দাঁত সংখ্যা, $T_1 = 80$

$T_3 = 50, T_5 = 30$

চালিত গিয়ারের দাঁত সংখ্যা, $T_2 = 40$

$T_4 = 25, T_6 = 12$

প্রথম গিয়ারের স্পীড, $N_1 = 30$ rpm

শেষ গিয়ারের স্পীড, $N_6 = ?$

আমরা জানি,

$$\frac{\text{শেষ চালিত গিয়ারের স্পীড}}{\text{১ম চালক গিয়ারের স্পীড}} = \frac{\text{চালক গিয়ারের দাঁত সংখ্যার গুণফল}}{\text{চালিত গিয়ারের দাঁত সংখ্যার গুণফল}}$$

বা, $\frac{N_6}{N_1} = \frac{T_1 \times T_3 \times T_5}{T_2 \times T_4 \times T_6}$

বা, $N_6 = \frac{T_1 \times T_3 \times T_5}{T_2 \times T_4 \times T_6} N_1$ [ক্রসগুণ করে পাই]

বা, $N_6 = \frac{80 \times 50 \times 30}{40 \times 25 \times 12} \times 30$ [মান বসিয়ে পাই]

$= 10 \times 30$

$= 300$ r.p.m **(Ans.)**

*****২। একটি যৌগিক গিয়ার ট্রেইন 1, 2, 3, 4, 5, ও 6 নং গিয়ারের দাঁতের সংখ্যা যথাক্রমে 80, 40, 50, 25, 30 ও 12. 1 নং গিয়ারের গতি প্রতি মিনিটে 40 হলে 6 নং গিয়ারের গতি কত?** বাকাশিবো- ২০১৫'পরি, ১৭, ১৮, ১৮'পরি

সমাধান ঃ প্রশ্ন নং ০১, এর অনুরূপ। $N_6 = 400$ rpm **(Ans.)**

***** ৩। একটি যৌগিক গিয়ার ট্রেইন চালক গিয়ারগুলোর দাঁত যথাক্রমে 120, 80, এবং 60। চালিত গিয়ারগুলোর দাঁত যথাক্রমে 60, 40 এবং 30। শেষ গিয়ারের বেগ 50 rpm হলে প্রথম গিয়ারের গতি কত?**

বাকাশিবো- ২০১১, ১৩, ১৩'পরি, ১৫'পরি, ১৯

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

চালক গিয়ারের দাঁত সংখ্যা, $T_1 = 120, T_3 = 80,\ T_5 = 60$

চালক গিয়ারের দাঁত সংখ্যা, $T_2 = 60, T_4 = 40, T_6 = 30$

সর্বশেষ গিয়ারের বেগ, $N_6 = 2000$ rpm

প্রথম গিয়ারের বেগ, $N_1 = ?$

আমরা জানি, $\frac{N_1}{N_6} = \frac{T_2 \times T_4 \times T_6}{T_1 \times T_3 \times T_5}$

বা, $N_1 = \frac{T_2 \times T_4 \times T_6}{T_1 \times T_3 \times T_5} \times N_6$

বা, $N_1 = \frac{60 \times 40 \times 30}{120 \times 80 \times 60} \times 50$

বা, $N_1 = \frac{1}{8} \times 50$

বা, $N_1 = 6.25$ rpm (**Ans.**)

Note ঃ মনে রাখার কৌশল, বিজোড়ের ক্রসে সবসময় বিজোড় থাকবে এবং জোড়ের ক্রসে সবসময় জোড় থাকবে।